

第九章 实验设计与质量改进*

实验设计 (Design OF Experiments, DOE) 方法广泛应用于产品和工艺参数稳健性设计及工艺过程的优化。通过科学的实验设计,可找出影响产品/工艺质量特征的主要因子并对其进行优化设计。从统计技术在质量管理中的应用来看,实验设计和统计过程控制的一个重要区别在于:统计过程控制是一种被动的工具,而实验设计是主动解决问题的工具。目前,国外一些大公司如摩托罗拉、柯达、福特、通用电器等,都非常重视在产品开发、工艺设计和工艺改进中应用 DOE 法。实验设计的方法很多,从发展来看有两个主流,一是源于西方的经典实验方法,主要包括比较实验、全因子实验(或析因实验)、部分因子实验、响应曲面模型(Response Surface Model)和 D-最优化实验等;二是日本质量管理专家田口玄一博士于 20 世纪 50 年代提出的实验方法。他将实验设计成功地与成本结合起来,提出三次设计、损失函数、信噪比、内外表等新概念。尽管田口方法在数据处理上仍存在着一些不尽完善的地方,但在不少企业得到了应用。我国在 20 世纪 80 年代广泛推广了田口方法,而对西方经典实验方法的应用较少。近年来,随着六西格玛管理的推广和统计软件包在企业的广泛应用,经典实验设计方法在质量改进中的应用日益增多。本章重点介绍全因子实验法,并简要介绍部分因子实验法、响应曲面法和田口法。

第一节 实验设计概述

一、实验设计的提出和发展

实验设计法是英国学者费舍尔(R. A. Fisher)在 20 世纪 20 年代为使农业实验合理化而提出的一种用于安排实验和分析实验数据的数理统计方法。最初,欧美各国主要将此方法应用于生物学、医学等领域的科学研究。第二次世界大战后,实验设计法在工业中得到推广和应用。在工业生产中,经常要进行技术革新,寻求优质、高产、低消耗的方法,这些都离不开实验。怎样合理的安排实验,怎样科学的分析实验数据,是广大科技人员和工人在生产活动、技术研究中经常遇到的问题。对此,实验设计法是十分有用的工具。

* 由于实验设计的分析与计算比较复杂,手工操作很难实现,因此本章借助 MINITAB 软件来完成实验设计的分析与计算。



全国Mini-MBA职业经理双证班



精品课程 权威双证 全国招生 请速充电

你可能准备跳槽或者求职, 却为缺少行业经验和专业证书而被用人单位百般挑惕!

你可能目前衣食无忧, 但随着年龄的增长和社会竞争压力的增大, 因为得不到专业的全新培训而失去竞争的机会和面临被淘汰的危机。

美华教育携手中国经济管理大学面向全国举办迷你 MBA 职业经理双证书班, 毕业颁发双证书。

招生专业及其颁发证书

认证项目	颁发双证	学费
全国《职业经理》MBA 高等教育双证书班	高级职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《人力资源总监》MBA 双证书班	高级人力资源总监职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《生产经理》MBA 高等教育双证班	高级生产管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《品质经理》MBA 高等教育双证班	高级品质管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《营销经理》MBA 高等教育双证班	高级营销经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《物流经理》MBA 高等教育双证班	高级物流管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《项目经理》MBA 高等教育双证班	高级项目管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《市场总监》MBA 高等教育双证书班	高级市场总监职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《酒店经理》MBA 高等教育双证班	高级酒店管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《企业培训师》MBA 高等教育双证班	企业培训师高级资格认证毕业证书+2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《财务总监》MBA 高等教育双证班	高级财务总监职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《营销策划师》MBA 双证书班	高级营销策划师高级资格认证证书+2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《企业总经理》MBA 高等教育双证班	全国企业总经理高级资格证书+2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《行政总监》MBA 高等教育双证班	高级行政总监职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《采购经理》MBA 高等教育双证班	高级采购管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《医院管理》MBA 高等教育双证班	高级医院管理职业经理资格证书+2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《企业管理咨询师》MBA 双证班	高级企业管理咨询师资格证书+2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元



【授课方式】 全国招生、函授学习、权威双证

我校采用国际通用3结合的先进教育方式授课（远程函授+教学电子光盘自修+网络学院持续视频学习）



【颁发证书】 学员毕业后可以获取权威双证书与全套学员学籍档案

- 1、毕业后可以获取相应专业钢印《高级职业经理资格证书》；
- 2、毕业后可以获取2年制的《MBA研究生课程高等教育研修结业证书》；



【证书说明】

1. 证书加盖中国经济管理大学钢印和公章（学校官方网站电子注册查询、随证书带整套学籍档案）；
2. 毕业获取的证书与面授学员完全一致，无“函授”字样，与面授学员享有同等待遇，证书是学员求职、提干、晋级的有效证明；。



【学习期限】 3个月（允许有工作经验学员提前毕业，毕业获取证书后学校仍持续辅导2年）



【收费标准】 全部费用1280元（含教材光盘、认证辅导、注册证书、学籍注册等全部费用）

函授学习为你节省了大量的宝贵的学习时间以及昂贵的MBA导师的面授费用，是经理人首选的学习方式。



【招生对象】

- 1、对管理知识感兴趣，具有简单电脑操作能力（有2年以上相应工作经验者可以申请提前毕业）。
- 2、年龄在20—55岁之间的各界管理知识需求者均可报名学习。



【教程特点】

- 1、完全实战教材，注重企业实战管理方法与中国管理背景完美融合，关注学员实际执行能力的培养；
- 2、对学员采用1对1顾问式教学指导，确保学员顺利完成学业、胸有成竹的走向领导岗位；
- 3、互动学习（专家、顾问24小时接受在线咨询，第一时间回答学员的提问和咨询）



【考试说明】

1. 卷面考核：毕业试卷是一套完整的情景模拟试卷（与工作相关联的基础问卷）
2. 论文考核：毕业需要提交2000字的论文（学员不需要参加毕业论文答辩但论文中必修体现出5点独特的企业管理心得）
3. 综合心理测评等问卷。



【颁证单位】

中国经济管理大学经中华人民共和国香港特别行政区批准注册成立。目前中国经济管理大学课程涉及国际学位教育、国际职业教育等。学院教学方式灵活多样，注重人才的实际技能的培养，向学员传授先进的管理思想和实际工作技能，学院会永远遵循“科技兴国、严谨办学”的原则不断的向社会提供优秀的管理人才。



【承办单位】

美华管理人才学校是中国最早由教委批准成立的“工商管理MBA实战教育机构”之一，由资深MBA教育专家、教育协会常务理事徐传有教授担任学校理事长。迄今为止，已为社会培养各类“能力型”管理人才近10万余人，并为多家企业提供了整合策划和企业内训，连续13年被教委评选为《优秀成人教育学校》《甲级先进办学单位》。办学多年来，美华人独特的教学方法，先进的教学理念赢得了社会各界的高度赞誉和认可。



【咨询电话】13684609885 0451--88342620

【咨询教师】王海涛 郑毅

【学校网站】<http://www.mhjy.net>

【咨询邮箱】xchy007@163.com



【报名须知】

- 1、报名登记表格下载后详细填写并发送邮件至 xchy007@163.com (入学时不需要提交相片，毕业提交试卷同时邮寄4张2寸相片和一张身份证复印件即可)
- 2、交费后请及时电话通知招生办确认，以便于收费当日学校为你办理教材邮寄等入学手续。



【证书样本】(全国招生 函授学习 权威双证 请速充电)

(高级职业经理资格证书样本)

(两年制研究生课程高等教育结业证书样本)



【学费缴纳方式】可以选择以下任意一种方式缴纳学费

方式一	学校地址	邮寄地址：哈尔滨市道外区南马路 120 号职工大学 109 室 邮政编码：150020 收件人：王海涛
方式二	学校帐号	学校帐号：184080723702015 账号户名：哈尔滨市道外区美华管理人才学校 开户银行：哈尔滨银行龙江支行 支付系统行号：313261018018
方式三	交通银行 (太平洋卡)	帐号：40551220360141505 户名：王海涛 开户行：交通银行哈尔滨分行信用卡中心
方式四	邮政储蓄 (存折)	帐号：602610301201201234 户名：王海涛 开户行：哈尔滨道外储蓄中心
方式五	中国工商银行 (存折)	帐号：3500016701101298023 户名：王海涛 开户行：哈尔滨市道外区靖宇支行
方式六	建设银行帐户 (存折)	中国人民建设银行帐户 (存折)： 1141449980130106399 用户名：王海涛
方式七	农业银行帐户 (卡号)	农业银行帐户 (卡号)： 6228480170232416918 用户名：王海涛 农行卡开户银行：中国农业银行黑龙江分行营业部道外支行景阳支行

可以选择任意一种方式缴纳学费，建议使用第五种方式（中国工商银行，比较方便快捷）收到学费的当天，学校就会用邮政特快的方式为你邮寄教材和考试问卷。

<http://www.mhgy.net>

特别是 20 世纪 50 年代以来,随着实验设计理论的不断发展和完善,其应用范围有了进一步的扩大。现代科学技术发展的日新月异,新产品层出不穷,在激烈的市场竞争中,能否开发出物美价廉、适合用户需要的新产品,是工业企业要认真研究的重大问题。

20 世纪 50 年代初,日本学者田口玄一 (G. Taguchi) 提出稳健性设计理论,他认为“好的产品是设计出来的”。为此,田口提出了质量损失函数的概念,把质量和经济两个范畴的概念统一起来,为质量波动的定量统计分析提出一套全新的方法。田口法把正交表、信噪比等统计学方法应用于质量管理中,提出的产品三阶段设计法在日本、美国等国家的学术界和企业界受到高度重视,得到了广泛的应用,产生了巨大的经济效益。田口所倡导的这种设计思想首先将实验设计成功地应用于新产品的开发设计,使实验设计法的理论与实践上升到一个新的高度,受到世界各国的瞩目。以美国 G. E. P. Box 为代表的西方统计学家在肯定田口在质量管理方面作出重大贡献的同时,也对田口理论指出所存在的不足,比如遭到众多批评的信噪比;缺乏数学模型;内、外表设计方法导致较多的实验设计;不考虑可控因子的交互作用等。为了减少实验的次数, G. E. P. Box 研究出一种 Split-Plot 设计方法。吴健福 (Jeff Wu) 教授开发了响应模型法,将可控因素和误差因素安排在同一张表中,利用响应模型来选择优化的可控因素组合,以克服田口方法的缺陷。西方统计学家迈耶斯 (R. H. Myers) 等人还提出将西方先进的实验设计技术与田口方法相结合的方法,以达到稳健性设计的目的。近年来,稳健性设计始终是各国专家研究的热门课题,随着研究的逐渐深入和应用的日趋广泛,实验设计技术也在不断发展和提高。

二、实验设计的基本概念和基本原则

1. 实验设计的基本概念

任何一个生产过程都可用图 9-1 表示,图中 X_1, X_2, \dots, X_p 表示可控因素,即可以通过设计过程优化选择的参数; Z_1, Z_2, \dots, Z_q 表示在实验室条件下可控,在实际生产条件下不可控的因素。当实验设计用于稳健性设计时,实验设计的

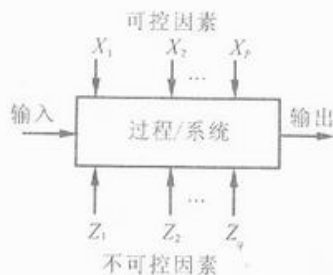


图 9-1 过程的一般模型

目标是要找出一组 X_1, X_2, \dots, X_p 参数的组合,一方面使实验输出最优,同时使不可控因素对过程输出的影响不敏感;当实验设计用于过程改进时,如果不可控因素很小,我们可以忽略其影响。

通常,假设科学家或者工程师(统称实验者)关心的是某个过程或者系统响应输出的质量特征值 Y ,则影响因素 X 与质量特征值 Y 之间的函数关系



可表示为

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (9-1)$$

式中 ε ——残差,表示由其他变异来源造成的 $f(X)$ 所无法解释的误差。

我们认为 ε 是一种统计意义上的误差,通常假设 $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, 则

$$\begin{aligned} \hat{Y} = E(Y) &= E[f(X)] + E(\varepsilon) \\ &= f(X) \end{aligned} \quad (9-2)$$

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i \quad (9-3)$$

一般情况下,我们很难根据工程知识直接建立质量特征值与影响因素之间的关系式。实验设计就是要采用科学的方法研究质量特征值和影响因素之间的关系,并根据实验设计建立的模型,确定 X_1, X_2, \dots, X_p 的最佳值,使得质量特征值 Y 尽量与设计目标相吻合。同时通过残差图分析诊断所建模型的合理性,这方面的内容将在后面进行介绍。一个实验设计一般由一个实验或一系列实验组成,它对一个过程或系统的输入变量作一些有目的的改变,通过观察识别出引起输出响应变化的原因。应用实验设计这一工具,能实现对实验的合理安排,对实验结果进行科学的分析,以较小的实验规模(实验次数)、较短的实验周期及较低的实验成本,获得理想的实验结果及正确结论。在实验设计中涉及不少基本概念,我们将通过下面的两个例子加以介绍。

例 9-1 某药厂近期研制出一种新的降压药,为了验证此降压药是否有效,实验可按如下方式进行:选择若干名高血压病人进行实验,并记录服药前后的血压值,然后通过统计分析来验证该药的有效性。

例 9-2 某化工工程师希望研究某种产品的产量与化学反应温度、化学反应时间、催化剂之间的关系。实验的目的是要寻找最佳生产条件。实验可按如下方式进行:选用三种反应温度,例如 60°C 、 70°C 、 80°C ;选用三种反应时间,例如 1 小时、1.5 小时、2 小时;选用三种催化剂,例如品种 1、品种 2、品种 3。对温度、时间、催化剂的 27 种组合的每一种做一次实验,记录产品的产量,并根据实验结果寻找产量与温度、时间、催化剂之间的规律,然后根据所找到的规律确定最佳生产条件。

衡量实验结果好坏的指标被称为响应变量(响应输出),例 9-1 中的血压值和例 9-2 中的产量分别是这两个实验的响应变量。根据响应变量是否可用数值表示,将响应变量分为定量的响应变量和定性的响应变量;根据同一实验响应变量的个数,将响应变量分为单响应变量和多响应变量,例 9-1 和例 9-2 的响应变量均属于定量的单响应变量。影响响应变量的因素称为实验问题中的因子,例 9-2 中有三个因子,即反应温度 X_1 、反应时间 X_2 和催化剂 X_3 。实验中因子所处的各个状态称为因子水平, 60°C 、 70°C 和 80°C 就是例



9-2中反应温度 X_1 的三个因子水平。因子水平在实验设计中一般用规范化后的数据,这将在后面比较详细地介绍。同时因子也有定量因子和定性因子之分,例9-2中的前两个因子都是定量因子,第三个因子是定性因子。

2. 实验设计的基本原则

所谓实验的统计设计,就是设计实验的过程,使得收集的数据适合于用统计方法分析,得出有效的和客观的结论。如果想从数据作出有意义的结论,用统计方法作实验设计是必要的。这样一来,一个实验设计问题就存在两个方面:实验的方案设计和数据的统计分析,两者紧密相连,因为分析方法直接依赖于所选择的设计方案。为了保证实验结果中包含尽量多的有用信息,并且能够方便地将它们分析提取出来,在进行实验设计时应考虑到三个基本原则:重复性、随机化和区组化,通常称为费歇尔三原则。

(1) **重复性 (Repetition) 原则** 它是指基本实验应该重复进行若干次。如果 σ^2 是无重复实验结果的方差,那么当实验重复 n 次后,方差就减少到 σ^2/n ,因此,进行重复实验的主要目的就是可以得到比较精确的实验结果,实验的次数越多,得到的结果就越精确。其次,在实验过程中,总会不可避免地出现由偶然性原因造成的随机误差 (Random Error),通过重复实验可以在进行方差分析时定量地将误差成分的影响计算出来,进而客观地评价实验结果。当然,在做实验时还应该考虑到重复带来的实验时间延长、实验经费增加等问题。好的实验设计应该在两者之间取得平衡。

(2) **随机化 (Randomization) 原则** 它是实验设计使用统计方法的基石。在实验中,人为的有次序安排实验往往会引起系统性误差。通过随机化,可以使实验误差均匀地分配到每次试验中去。随机化要求实验材料的分配和各个实验进行的次序都是随机确定的,观察值是独立分布的随机变量。

(3) **区组化 (Blocking) 原则** 它也是用来提高实验精确度的一种方法。它是将实验对象按照某种水平或标准加以分组,同一组内的实验尽量保证受同样的影响。与整个实验相比,一个区组内的性质应该更为类似,因而,通过区组化可以降低抽样的样本数,同时提高实验的精确度。

三、实验设计的分类

根据实验设计流派分 实验设计主要有两大流派:一是源于西方的经典实验方法,主要包括比较实验、全因子实验(或析因实验)、部分因子实验、响应曲面模型(RSM)等;二是日本质量管理专家田口玄一博士于20世纪50年代提出的实验方法。这两大流派都利用统计方法实现产品/过程稳健性设计及过程优化,但数据分析和模型解释过程却不尽相同。

根据实验设计原理分 可将实验设计分为全因子实验、部分因子实验、响



应曲面、田口方法等。

按因素的个数分 可将实验设计分为单因子实验、双因子实验、多因子实验等。

按因素的水平数分 可将实验设计分为2水平实验设计、3水平实验设计……K水平实验设计、混合实验设计等。

四、实验设计的基本步骤

概括地说,完整地解决一个实验设计问题需要如下基本步骤。

1. 明确实验目标

在做实验之前必须明确以下问题:为什么要做实验?实验欲达到什么目标?同时应该绘制工序流程图。

2. 选择响应输出

在选择响应输出时应考虑以下几点:

- 响应输出应尽量选择计量值数据
- 响应输出应真正反映工序/产品的关键质量特征
- 测量系统的能力必须充足(有关测量系统分析请参照本书第六章内容)
- 当响应输出不止一个时,可同时考虑多个响应输出,但响应输出的个数太多时,会增加问题的复杂性
- 对于每一个响应输出要确定其目标

3. 确定影响响应输出的主要因素及各主要因素的水平

首先,通过因果图分析找出可能的影响因素;其次,对影响因素进行分类,选择对响应输出影响显著、可变且可控的影响因素作为实验的输入变量;再次,确定各输入变量的水平和水平数。注意:水平的选择应为可调范围的一部分,不宜过大,也不宜过小。

4. 选择实验类型

根据实验目的的不同选择不同的实验:如选择全因子实验、部分因子实验、响应曲面法或田口法等。

5. 确定实验策略

确定实验时主要涉及:

- 确定响应输出的变异来源(具体内容请参照本书第五章第二节所讲的多变异分析法)
- 确定实验的单位产品



- 确定样本含量（重复次数）
- 确定是否进行区组化
- 确定实验的随机化方法等

6. 进行实验

实验步骤应该注意以下几点：

- 除实验过程应改变的因素外，其他因素均应保持不变
- 实验过程中要记录不可控因素的变化
- 实验要随机化

7. 模型拟合和诊断

模型拟合中主要考虑以下几点（具体内容请参照本书第九章第二节）：

- 根据所选择的实验方法进行模型拟合
- 检查模型总体拟合情况
- 检查模型是否显著
- 检查模型中的每一项是否显著
- 检查模型是否存在曲性
- 删除模型中的不显著项
- 计算模型拟合的残差和预测值

模型诊断主要进行以下检验：

- 正态性检验
- 异方差检验
- 响应独立性检验
- 是否存在减少方差的可能性检验

8. 解释模型

根据模型确定最优的工艺参数。对于一阶模型，若最优点不在实验设计的区间内，要根据模型确定最速上升方向，以便为下一步实验确定方向。

9. 验证实验结果

根据模型解释的结果确定最优工艺参数，并运行实验，验证实验以检查是否达到了期望的结果，从而证实实验所得结论的正确性。

五、实验设计中应注意的问题

在实验设计中，我们应注意以下问题：

- 实验设计的关键在于对实验方案的设计，而不是对实验结果的分析，如果实验方案设计不好，再复杂、先进的数学分析也无济于过程质量的改进



- 实验设计是一个循序渐进的过程，不要期望设计一个复杂的实验来解决所有的问题
- 对实验结果的验证是衡量实验结果和模型是否正确的唯一标准

我们将在接下来的章节中重点介绍全因子实验（主要是2水平的全因子实验）、简要介绍部分因子实验和RSM方法，同时对田口方法也做一些简单的介绍。

第二节 全因子实验

一、全因子实验简介

1. 全因子实验的基本原理

全因子实验（Full Factorial Design of Experiments）又称为析因实验，它研究两个或多个因子的效应，在这类实验的每一个完全实验或每一次重复中，这些因子的所有可能的水平组合都被研究到。如果第1个因子有 L_1 个水平，第2个因子有 L_2 个水平，……，第 K 个因子有 L_k 个水平，则称每次重复都包含 $L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_k$ 个处理组合的实验为 $L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_k$ 析因实验。例如，在每一次重复中， $2 \times 3 \times 5$ 析因实验需要 $2 \times 3 \times 5 = 30$ 次实验，而 $2 \times 2 \times 2$ 析因实验需要 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 次实验。

(1) 主效应和交互作用 全因子实验不仅可以得到每个因子的主效应，而且可以获得因子之间的交互作用。一个因子的效应定义为当这一因子的水平改变时所产生响应的变化，这种效应常称之为主效应。在一些实验中，一个因子的水平间的响应差会随着其他因子的水平不同而不同。当这种情况出现时，因子之间就存在交互作用。因子的主效应以及因子之间的交互作用均可通过图解来说明。如果两个因子之间不存在交互作用，则两条线平行或几乎平行；如果两个因子之间交互作用显著，则两条线不平行。因此，通过交互作用图来直观地判断因子之间是否存在交互作用。在实验分析之前，首先要将原始自然变量转化为规范变量。以两水平的实验设计为例，对于因子 A ，其高水平为 A_+ ，低水平为 A_- ，通过式(9-4)将原始自然变量规范化。规范化后的因子 A 用 X_1 表示，对应其高水平将为+1，低水平为-1（本章后面的分析将省略转化过程，直接采用规范化后的变量）。

$$X_1 = \frac{A - (A_+ + A_-) / 2}{(A_+ - A_-) / 2} \quad (9-4)$$

实验设计采用正交表（表9-1）（以 2^2 析因实验为例），因子 X_1 和 X_2 均有两个水平（-1和+1）， Y 代表因子 X_1 和 X_2 处于不同水平时的响应输出值。表



中任意两列因子水平（包括交互作用列）对应乘积之和均为零，因此，它可以保证每一项效应（主效应和交互作用）都可独立地被估计。正交表的数据安排是有章可循的，一般是第一列“-1”，“+1”相间，第二列“-1 -1”，“+1 +1”相间，依此类推。对于 2^n 实验设计来说，其第 j 列（ $j < n$ ）是“-1 -1...-1”（ 2^{j-1} 个），“+1 +1...+1”（ 2^{j-1} 个）相间。交互作用项则由交互因子所在列的正负号相乘而得。

表 9-1 正交表

X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y
-1	-1	+1	
+1	-1	-1	
-1	+1	-1	
+1	+1	+1	

采用正交表实验后，各效应（主效应和交互作用）的估计为

$$\Delta_{X_1} = (\bar{Y}_{X_1^{+1}} - \bar{Y}_{X_1^{-1}}) \quad \Delta_{X_2} = (\bar{Y}_{X_2^{+1}} - \bar{Y}_{X_2^{-1}}) \quad (9-5)$$

$$\Delta_{X_1} \Delta_{X_2} = [\bar{Y}_{(X_1 \cdot X_2)^{+1}} - \bar{Y}_{(X_1 \cdot X_2)^{-1}}] \quad (9-6)$$

如效应值为正，则说明它对响应输出的影响是正的，即增加该变量响应输出也会相应增加；若效应值为负，则结果刚好相反。

(2) 全因子实验的模型 全因子实验以线性假设为前提，建立线性回归模型。例如，两因子和三因子的实验，其线性模型为

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \varepsilon \quad (9-7)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{123} X_1 X_2 X_3 + \varepsilon \quad (9-8)$$

通过最小二乘估计获得模型系数的估计值，进而建立全因子实验的线性回归模型

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_{12} X_1 X_2 \quad (9-9)$$

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + \hat{\beta}_{12} X_1 X_2 + \hat{\beta}_{23} X_2 X_3 + \hat{\beta}_{13} X_1 X_3 + \hat{\beta}_{123} X_1 X_2 X_3 \quad (9-10)$$

该线性模型的系数估计值与因子各效应之间的关系为

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{\sum Y_i}{n} & \hat{\beta}_1 &= \frac{\Delta_{X_1}}{2} & \hat{\beta}_2 &= \frac{\Delta_{X_2}}{2} & \hat{\beta}_{12} &= \frac{\Delta_{X_1 X_2}}{2} \\ \hat{\beta}_{23} &= \frac{\Delta_{X_1} \Delta_{X_3}}{2} & \hat{\beta}_{13} &= \frac{\Delta_{X_1} \Delta_{X_3}}{2} & \hat{\beta}_{123} &= \frac{\Delta_{X_1} \Delta_{X_2} \cdot \Delta_{X_3}}{2} \end{aligned} \quad (9-11)$$



(3) 方差分析 (模型检验) 通过方差分析来检验模型是否显著和模型中的每一项是否显著。以两因子 (X_1 和 X_2) 析因实验为例, 则方差分析会涉及总离差平方和 SS_T 、因子 X_1 的离差平方和 SS_{X_1} 、因子 X_2 的离差平方 SS_{X_2} 、因子 X_1 与 X_2 交互作用的离差平方和 $SS_{X_1X_2}$ 和随机误差离差平方和 SS_E 。离差平方和的具体计算公式请参照本书第六章的有关内容。各离差平方和之间的关系如下式所示

$$SS_T = SS_{X_1} + SS_{X_2} + SS_{X_1X_2} + SS_E \quad (9-12)$$

根据离差平方和与自由度可计算出均方, 具体计算公式为

$$MS_{X_1} = \frac{SS_{X_1}}{DF_{X_1}} \quad MS_{X_2} = \frac{SS_{X_2}}{DF_{X_2}} \quad (9-13)$$

$$MS_{X_1X_2} = \frac{SS_{X_1X_2}}{DF_{X_1X_2}} = \frac{SS_{X_1X_2}}{DF_{X_1} \times DF_{X_2}} \quad (9-14)$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{DF_E} \quad (9-15)$$

各均方之间的关系如下式所示

$$DF_T = DF_{X_1} + DF_{X_2} + DF_{X_1X_2} + DF_E \quad (9-16)$$

表 9-2 方差分析表

来源	离差平方和 (SS)	自由度 (DF)	均方 (MS)	F 统计量	P (X > F)
X_1	SS_{X_1}	DF_{X_1}	MS_{X_1}	MS_{X_1}/MS_E	—
X_2	SS_{X_2}	DF_{X_2}	MS_{X_2}	MS_{X_2}/MS_E	—
X_1X_2	$SS_{X_1X_2}$	$DF_{X_1X_2}$	$MS_{X_1X_2}$	$MS_{X_1X_2}/MS_E$	—
误差	SS_E	DF_E	MS_E	—	—
总和	SS_T	DF_T	—	—	—

完整的方差分析表可概括为表 9-2。若 $F > F_\alpha$, 则说明该因子以 α 的水平是显著的, 即相对于误差项来说, 它对响应输出的影响更为显著。由于大量统计软件的开发与应用, 我们将很少通过查表、比较 F 值的方法进行判断, 而是通过 P 值的应用 (如表 9-2 中的第 6 列)。这种方法等价于查表, 同时又比查表方便。如果 P 值小于显著性水平 α , 则检验统计量的值落在拒绝域中; 如果 P 值大于等于显著性水平 α , 则检验统计量的值不会落在拒绝域中。具体到实验设计的分析中, 前者说明对应的因子相对于误差项来说, 对响应输出的影响更为显著。同时, 我们用 SS_M 来表示模型所能解释的误差平方和, 即



$$SS_A + SS_B + SS_{AB} = SS_M \quad (9-17)$$

定义样本确定系数 $R^2 = SS_M / SS_T = (SS_T - SS_E) / SS_T$ 来衡量模型的总体拟合优良程度, R^2 越大, 模型所能解释的误差平方和越大, 即模型拟合得越好, 一般要求 $R^2 \geq 80\%$ 才比较好。同时, 由于 R^2 与变量个数成比例以及其他原因, 需要对 R^2 进行调整, 以使其与变量个数无关, 即用 $R_{adj}^2 = (MS_T - MS_E) / MS_T = 1 - MS_E / MS_T$, 代表调整后的值。

(4) 模型诊断 模型的主要诊断工具是基于残差的残差图。

① 正态性假定的检验。正态性假定检验有两种方法: 图形法和统计检验法。图形法是指可以通过残差直方图或残差正态概率图检查残差是否正态。需要注意的是: 对于小的样本, 经常出现明显的波动, 因此图形上中度偏离正态性的出现不一定包含了严重违反正态性假定的意思。如果图形上出现正态性的严重偏离, 则正态性假定有严重违反的可能, 需要进行进一步的分析。统计检验法包括 Shapiro - Wilk 检验、Anderson - Darling 检验和 Kolmogorov - Smirnov 检验等, 鉴于篇幅所限, 本章不进行详细讨论。

② 方差齐性假定的检验。此检验可通过依时间顺序的残差图和残差对拟合值的图形来实现, 如果模型是正确的并且满足假定的条件, 则残差应该是无定形的, 特别是, 它们应该与拟合的响应值无关。如果违背了方差的齐性假定, 通常的处理方案是应用方差稳定性变换, 然后对变换后的数据进行分析。

③ 独立性假定的检验。可通过依时间顺序的残差图来实现, 正残差和负残差的趋势都意味着违反了关于误差的独立性假定, 这是一个潜在的严重问题和难以校正的问题, 因此, 只要有可能, 就要在收集数据时就防止这一问题的发生, 而实验的固有随机化是获得独立性的一个重要的步骤。

④ 通过残差对其他变量的图形来检验。可检验其是否存在减少方差的可能性。如果数据收集时还跟其他的可能影响响应的变量有关, 则应画出残差对那些变量的图形, 通过该图我们可以检验是否存在减少方差的可能性, 寻找可能存在的分散效应。

全因子实验广泛应用于涉及多因素的实验, 考虑到交互作用的普遍存在, 我们必须去研究这些因子对响应的联合效应。然而, 全因子实验有几种特殊情况很重要, 因为它们广泛应用于研究工作而且是一些重要实践价值的设计的基础。这些特殊情况中最重要的一种是 2^k 析因设计, 即实验有 k 个因子, 每个因子仅取 2 个水平。 2^k 析因设计是应用最为广泛的一种设计方法, 原因在于:

a. 在 2 水平全因子实验中, 每一个被研究的因子需要相对较少的实验次



数；同时，尽管该实验很难探究因子空间中相对较宽的一个区域，但是它可以指出变化的主要趋势，进而确定下一步实验的方向；

b. 2 水平实验具有很好的序贯性特征；

c. 当需要更加彻底的局部探究时（例如，响应曲面设计），2 水平的全因子实验可用于形成复合设计；

d. 2 水平全因子实验是形成 2 水平部分因子实验的基础；

e. 2 水平全因子实验和相应的 2 水平部分因子实验可用于建立区组化设计，使得最终构建的设计的复杂度和问题的复杂度相匹配；

f. 2 水平全因子实验产生的观测值可以通过简单的计算和判断很容易地进行解释。

2. 全因子实验的特点

全因子实验设计相对于其他实验设计具有如下特点。

(1) 效率会随着因子个数的增加而下降 在实验中，若有 n 个因子，每个因子有两个水平（高水平和低水平，或 +1 和 -1），则至少需要进行 2^n 次实验，即有 2^n 个处理组合，可以估计 $2^n - 1$ 个因子效应，并且有 $2^n - 1$ 个自由度。在所有 $2^n - 1$ 个自由度中， n 个自由度用于估计主效应， C_n^2 个自由度用于估计二阶交互作用， C_n^3 个自由度用于估计三阶交互作用，依此类推。即所有主效应和交互作用均可估计出。在实际应用中，我们常假定三阶以上交互作用是不显著的，因此不对这些高阶交互作用进行估计，而往往是将它们归并到误差项中。这时全因子实验的效率会随着因子个数的增加而下降，通过实验的效率公式可得以证实。实验效率公式如式（9-18）所示。

$$E = \frac{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2}{2^n} \times 100\% \quad (9-18)$$

当 $n=2$ 时， $E=100\%$ ； $n=3$ 时， $E=87.5\%$ （图 9-2）。因此，当因子个数 $n=2 \sim 5$ 时，适合用全因子实验方法。

(2) 全因子实验建立的是“线性”模型 全因子实验以线性假设为前提，建立线性回归模型，模型中的每一个参数都可以独立地被估计出。

(3) 满足平衡性和正交性条件 全因子实验满足实验设计的平衡性和正交性，即 $\sum X_i = 0$ ； $\sum X_i \cdot X_j = 0$ 。其中，平衡性可以简化实验数据的分析，正交性可以保证每一项效应都可独立地被估计。

(4) 可以检验线性假设是否成立 在全因子实验中通过增加中心点来检验线性假设是否成立，同时可以获得纯误差项，而且不会破坏实验的平衡性和正交性。



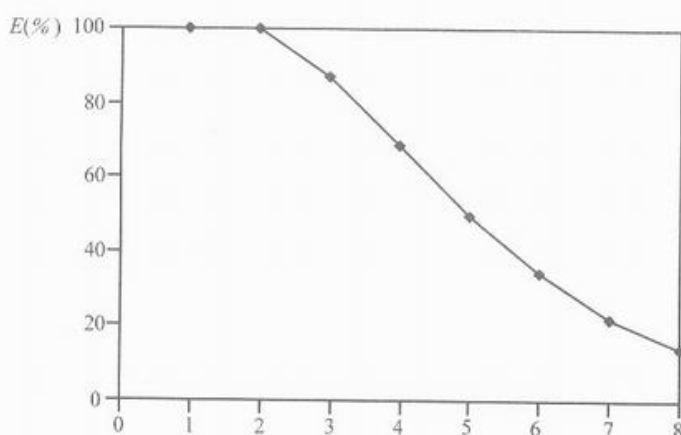


图 9-2 全因子实验效率与因子个数的关系

3. 全因子实验设计的应用条件

- 影响因子的个数少于 5 个
- 因子之间可能存在交互作用
- 响应输出和影响因子之间是线性关系

二、 2^k 析因设计

2^k 析因设计是指每个因子只有两个水平的全因子实验，基于上述原因我们将对它进行重点讨论。在 2^k 析因设计中，主要研究最简单的 2 个因子的实验，即 2^2 析因设计。

1. 2^2 析因设计

对于 2^2 析因设计，即只有 2 个因子（如 X_1 和 X_2 ），每个因子有 2 个水平（+1 和 -1）。它的几何解释如图 9-3 所示：其中外围的 4 个点代表因子点，中间的点代表中心点。中心点指的是所有因子均处于水平中心的点，规范化后的变量中心点以 0 表示。

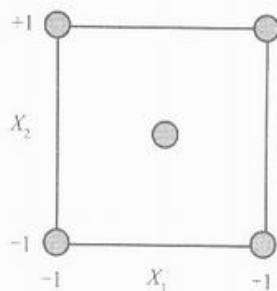


图 9-3 2^2 析因设计

针对实验中的交互作用是否显著，是否增加中心点，以及实验是否重复，





我们将分别举例说明。

(1) 2^2 设计无交互作用, 无重复, 不增加中心点 例如按照表 9-3 收集数据 (实际做实验时需要按随机化后的顺序, 即表中第二列的实验顺序进行实验), 该设计无重复, 不增加中心点。

表 9-3 2^2 设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y
1	4	-1	-1	+1	10
2	1	+1	-1	-1	20
3	3	-1	+1	-1	15
4	2	+1	+1	+1	25

进行因子效应分析 因子 X_1 的主效应为

$$\Delta_{X_1} = \frac{25 + 20}{2} - \frac{10 + 15}{2} = 10$$

这就是说, 因子 X_1 从低水平增至高水平致使其平均响应增加了 10 个单位。相似地, 因子 X_2 的主效应为

$$\Delta_{X_2} = \frac{15 + 25}{2} - \frac{10 + 20}{2} = 5$$

因子 X_1 和 X_2 的交互作用为

$$\Delta_{X_1 \cdot X_2} = \frac{10 + 25}{2} - \frac{15 + 20}{2} = 0$$

即因子 X_1 与 X_2 之间不存在交互作用。该分析也可通过图 9-4 和图 9-5 直观地表示。主效应图上, 横轴代表两个因子的不同水平, 纵轴代表响应均值, 且直线的斜率 (β) 与效应成正比。很明显, 因子 X_1 和 X_2 的主效应均为正效应, 且因子 X_1 的主效应大于因子 X_2 的主效应。交互作用图上两条线平行, 即表明因子 X_1 和 X_2 之间不存在交互作用。

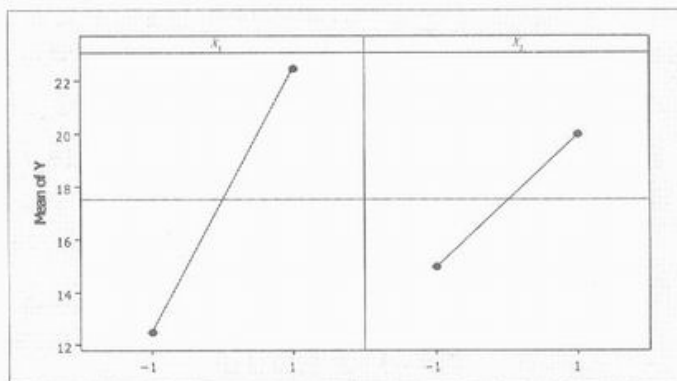
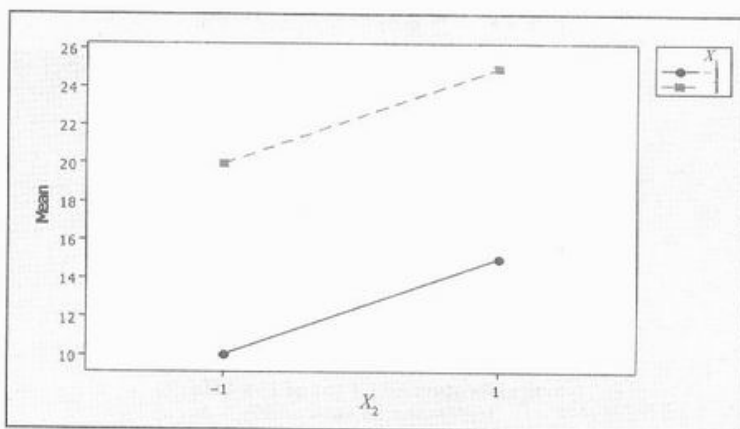


图 9-4 2^2 设计的主效应图

图 9-5 2^2 设计的交互作用图

估计参数建立全因子实验模型

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Delta_{X_1}}{2} = 5 \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\Delta_{X_2}}{2} = 2.5$$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\Delta_{X_1 \cdot X_2}}{2} = 0 \quad \hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i}{4} = 17.5$$

即: $\hat{y} = 17.5 + 5x_1 + 2.5x_2$ 。数据统计分析结果如表 9-4 所示, 表中第一列代表模型中的各项, 第二列代表估计的各项效应值, 第三列代表估计的模型系数。很明显, 手工计算的各效应值和模型系数与软件统计分析结果是一致的。因此, 后面的分析将省略手工计算, 直接给出统计分析结果。

表 9-4 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	模型系数 (β)
常数		17.5000
X_1	10.0000	5.0000
X_2	5.0000	2.5000
X_1X_2	0.0000	0.0000

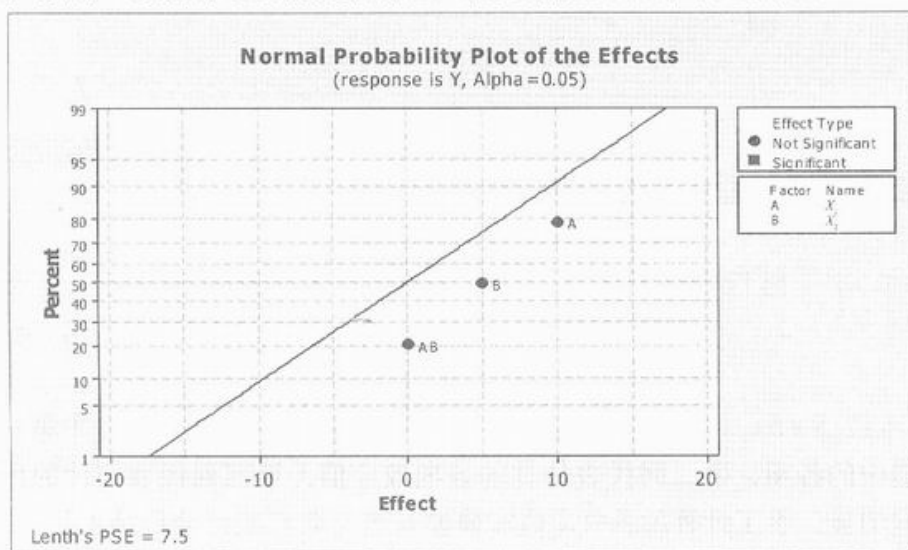
进行方差分析检验模型的显著性 这一步骤手工计算很复杂, 因此只给出统计分析结果, 从分析结果直接获得需要的信息。其分析结果如表 9-5 和图 9-6 所示, 因为数据点比较少, 误差为 0, 所以无法进行模型检查和诊断, 但是可从图 9-6 了解各效应的显著性。在如图 9-6 所示的效应估计量的正态概率图中, 点代表各效应, 且点越靠近斜线, 效应越不显著。为了更容易区分, 以圆点代表不显著的效应, 方点代表显著效应。很明显, 两因子的主效应和交互作用均不显著。



表 9-5 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	p (X>F)
主效应	2	125.0	62.50	*	*
二阶交互作用	1	0.0	0.00	*	*
误差项	0	*	*		
合计	3	125.0			

注: 表中的 * 号表示所对应项的数据不存在, 出现这种情况的原因在于误差为零。



注: 图中 A 代表因子 X_1 , B 代表因子 X_2 , AB 代表因子 X_1 和 X_2 的交互作用 X_1X_2 。

图 9-6 效应估计量的正态概率图

(2) 2^2 设计无交互作用, 有重复, 不增加中心点 例如按照表 9-6 收集数据 (实际做实验时需要按随机化后的顺序, 即表中的第二列实验顺序进行实验), 该设计重复一次, 不增加中心点。重复实验可以使误差项不为 0, 检验模型的显著性。

表 9-6 2^2 设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1	2	-1	-1	+1	10
2	1	+1	-1	-1	20
3	8	-1	+1	-1	15
4	3	+1	+1	+1	25
5	5	-1	-1	+1	11



续表

标准顺序	实验顺序	X_1	X_2	X_1X_2	Y
6	4	+1	-1	-1	21
7	6	-1	+1	-1	14
8	7	+1	+1	+1	24

实验定性与定量分析如图9-7、图9-8、图9-9、表9-7和表9-8所示。从图9-7和图9-8很明显可以看出因子 X_1 和 X_2 的主效应均为正效应,且因子 X_1 的主效应大于因子 X_2 的主效应,因子 X_1 和因子 X_2 之间无交互作用。从表9-7可以得到该全因子实验的模型为: $\hat{y} = 17.5 + 5x_1 + 2.5x_2$,且两因子的主效应均很显著($P < 0.05$),而交互作用不显著($P > 0.05$),这一点也可以通过图9-9得到验证(图中主效应是方点,而交互作用是圆点)。同时,可以知道模型的总体拟合良好: $R^2 = 99.15\%$, $R^2_{adj} = 98.50\%$ 。表9-8表明回归模型中主效应很显著,交互作用为0。

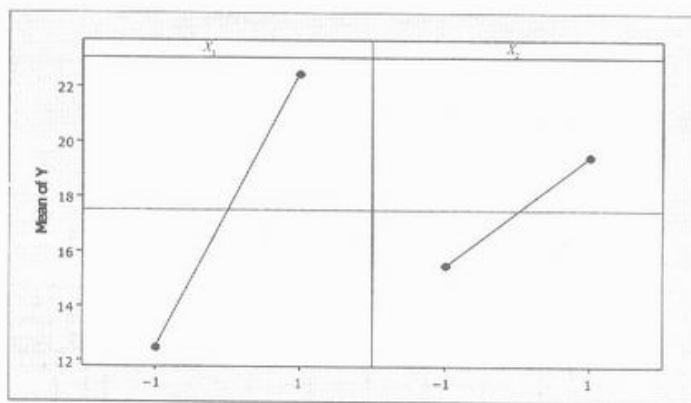
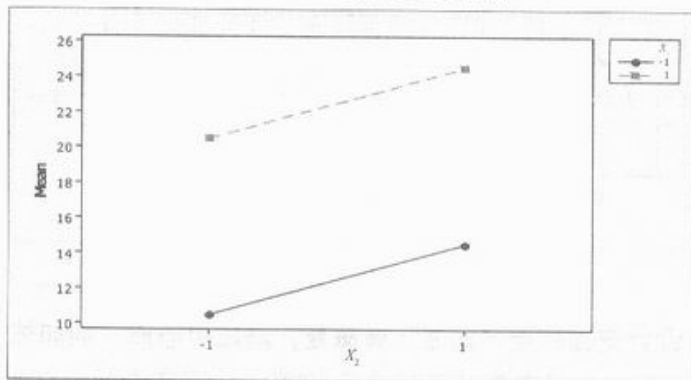
图9-7 2^2 设计的主效应图图9-8 2^2 设计的交互作用图

表 9-7 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	p ($X > T$)
常数		17.5000	0.2500	70.00	0.000
A	10.0000	5.0000	0.2500	20.00	0.000
B	4.0000	2.0000	0.2500	8.00	0.001
A * B	0.0000	0.0000	0.2500	0.00	1.000

$R^2 = 99.15\%$, $R_{adj}^2 = 98.50\%$

表 9-8 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	p ($X > F$)
主效应	2	232.000	116.000	232.00	0.000
二阶交互作用	1	0.000	0.000	*	*
误差项	4	2.000	0.500		
纯误差	4	2.000	0.500		
合计	7	234.000			

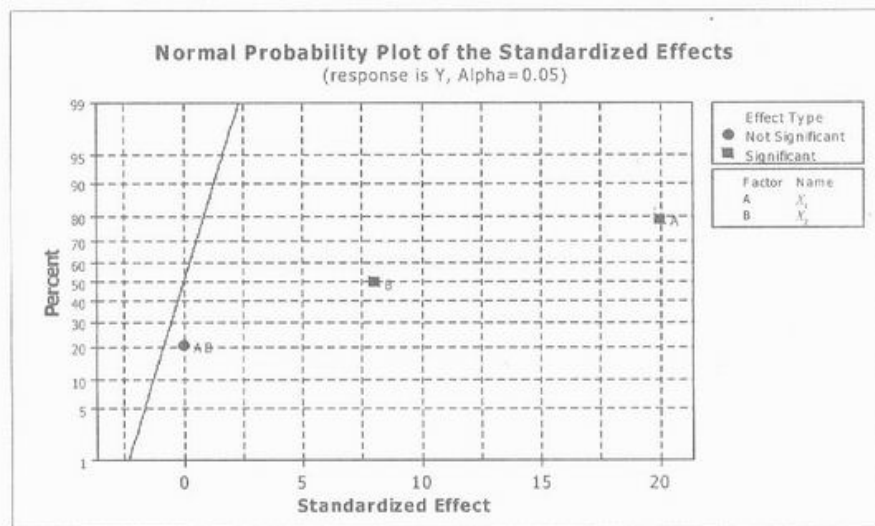


图 9-9 效应估计量的正态概率图

(3) 2^2 设计交互作用不显著, 有重复, 增加中心点 例如按照表 9-9 收集数据 (实际做实验时需要按随机化后的顺序, 即表中的第二列实验顺序进行实验), 该设计重复一次, 且增加 3 个中心点。增加中心点可以使纯误差项



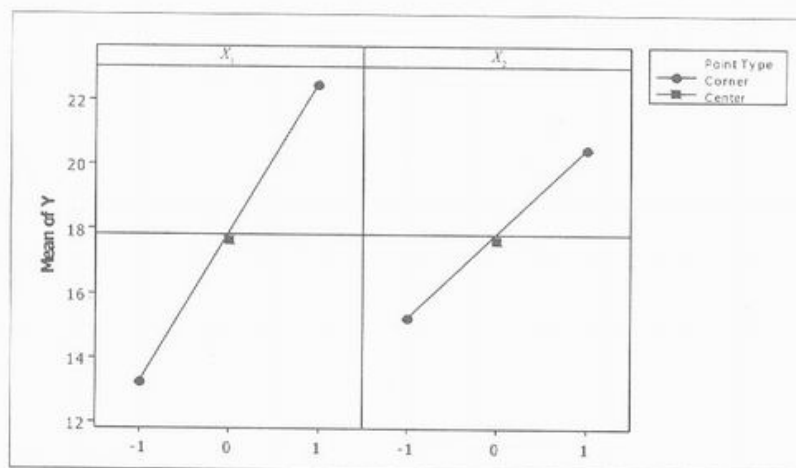
不为0, 检验模型的线性假设是否成立, 即模型曲性检验。

表 9-9 2^2 设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	中心点	X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y
1	4	1	-1	-1	+1	10
2	8	1	+1	-1	-1	20
3	2	1	-1	+1	-1	15
4	7	1	+1	+1	+1	25
5	6	1	-1	-1	+1	12
6	10	1	+1	-1	-1	19
7	9	1	-1	+1	-1	16
8	3	1	+1	+1	+1	26
9	1	0	0	0	0	18
10	5	0	0	0	0	17
11	11	0	0	0	0	18

注: 第3列中1代表因子点, 0代表中心点。

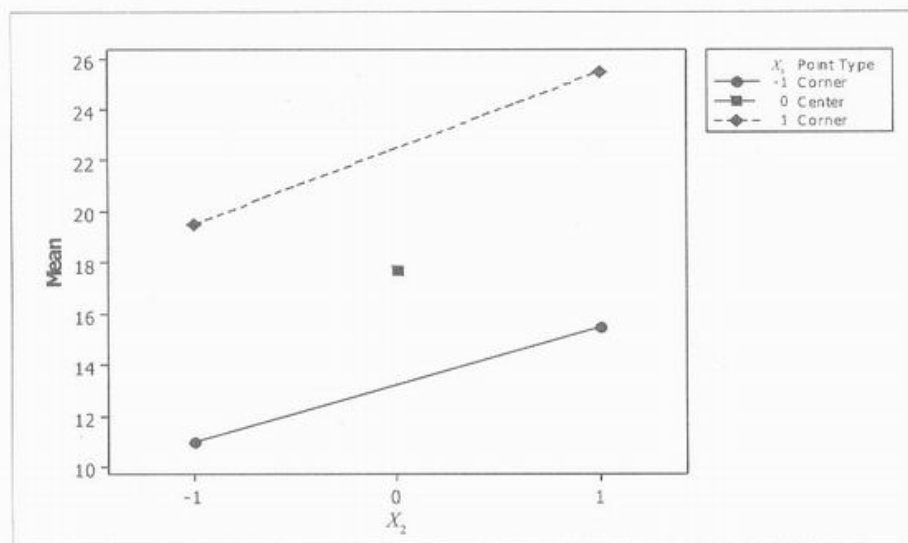
实验定性与定量分析如图9-10、图9-11、图9-12、表9-10和表9-11所示: 从图9-10和图9-11很明显可以看出因子 X_1 和 X_2 的主效应均为正效应, 且因子 X_1 的主效应大于因子 X_2 的主效应, 因子 X_1 和因子 X_2 之间无显著交互作用。从表9-10可以得到该全因子实验的模型为: $\hat{y} = 17.818 + 4.625x_1 + 2.625x_2$, 且两因子的主效应均很显著 ($P < 0.05$), 而交互作用影响虽不为0, 但不显著 ($P > 0.05$), 这一点也可以通过图9-12得到验证 (图中主效应是方点, 而交互作用是圆点)。同时, 可以知道模型的总体拟合良好: $R^2 = 97.67\%$, $R^2_{adj} = 97.09\%$ 。表9-11表明回归模型中主效应很显著 ($P < 0.05$), 二阶交互作用和曲性均不显著 ($P > 0.05$)。



注: 圆点代表因子点, 方点代表中心点。

图 9-10 2^2 设计的主效应图





注：圆点代表因子点，方点代表中心点。

图 9-11 2^2 设计的交互作用图

表 9-10 效应及模型系数表（规范变量）

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	p ($X > T$)
常数		17.8182	0.2352	75.74	0.000
A	9.2500	4.6250	0.2759	16.77	0.000
B	5.2500	2.6250	0.2759	9.52	0.000
A * B	0.7500	0.3750	0.2759	1.36	0.216

$R^2 = 97.67\%$, $R^2_{adj} = 97.09\%$

表 9-11 方差分析表（规范变量）

来 源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	p ($X > F$)
主效应	2	226.250	113.125	185.83	0.000
二阶交互作用	1	1.125	1.125	1.85	0.216
误差项	7	4.261	0.609	—	—
曲性	1	0.095	0.095	0.14	0.725
纯误差	6	4.167	0.694	—	—
合计	10	231.636	—	—	—

(4) 2^2 设计交互作用显著，有重复，增加中心点 例如按照表 9-12 收集数



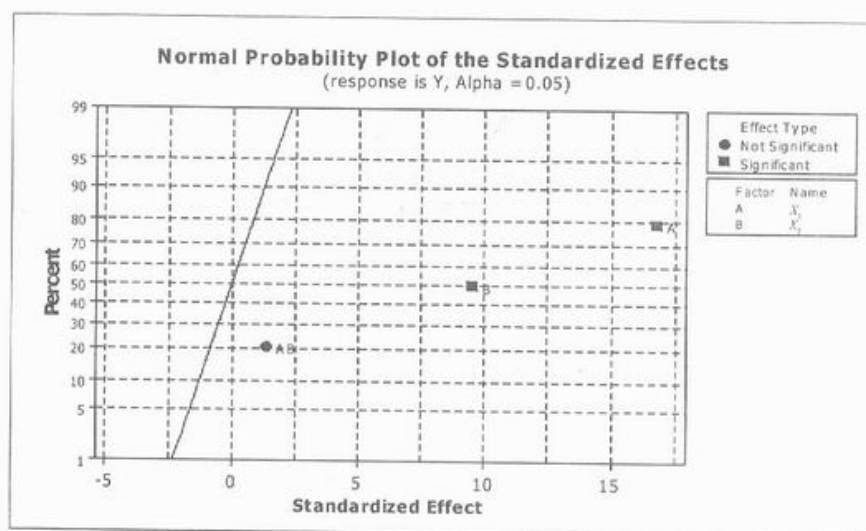


图 9-12 效应估计量的正态概率图

据（实际做实验时需要按随机化后的顺序，即表中的第二列实验顺序进行实验），该设计重复一次，且增加 3 个中心点。

表 9-12 2^2 设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	中心点	X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y
1	8	1	-1	-1	+1	10
2	9	1	+1	-1	-1	25
3	3	1	-1	+1	-1	20
4	4	1	+1	+1	+1	15
5	10	1	-1	-1	+1	12
6	11	1	+1	-1	-1	23
7	6	1	-1	+1	-1	26
8	1	1	+1	+1	+1	17
9	5	0	0	0	0	18
10	2	0	0	0	0	17
11	7	0	0	0	0	18

注：第 3 列中 1 代表因子点，0 代表中心点。

实验定性与定量分析如图 9-13、图 9-14、图 9-15、表 9-13 和表 9-14 所示：从图 9-13 和图 9-14 很明显可以看出因子 X_1 和 X_2 的主效应均为正效应，且因子 X_1 的主效应大于因子 X_2 的主效应，因子 X_1 和因子 X_2 之间交互作用非常显著。当交互作用显著时，对应的主效应将只有很小的实用价



值, 而交互作用的信息将更为有用。该全因子实验的模型为: $\hat{Y} = 18.273 + 1.5X_1 + X_2 - 5X_1X_2$, 两因子的主效应均不显著 ($P > 0.05$), 然而交互作用很显著 ($P < 0.05$), 这一点也可以通过图 9-15 得到验证 (图中主效应是圆点, 而交互作用是方点)。同时, 可以知道模型的总体拟合良好: $R^2 = 89.62\%$, $R^2_{adj} = 85.17\%$ 。表 9-14 表明回归模型中二阶交互作用很显著 ($P < 0.05$), 主效应和曲性均不显著 ($P > 0.5$)。

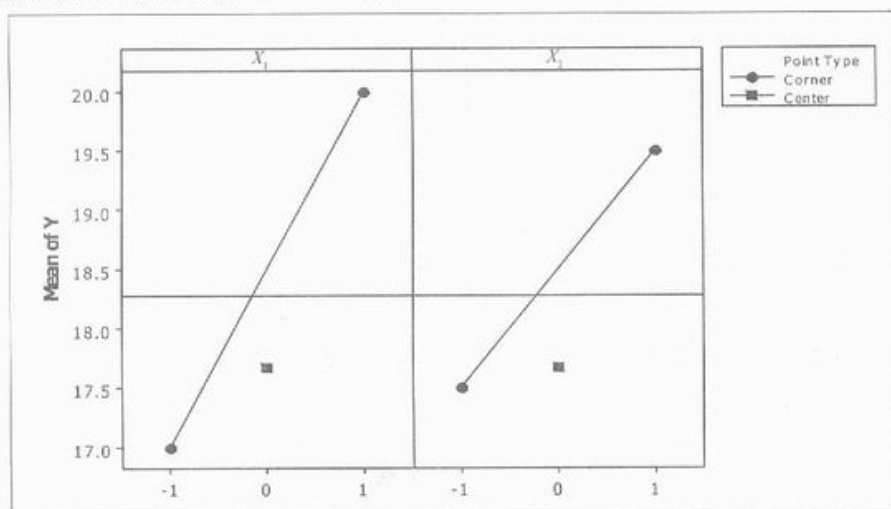


图 9-13 2^2 设计的主效应图

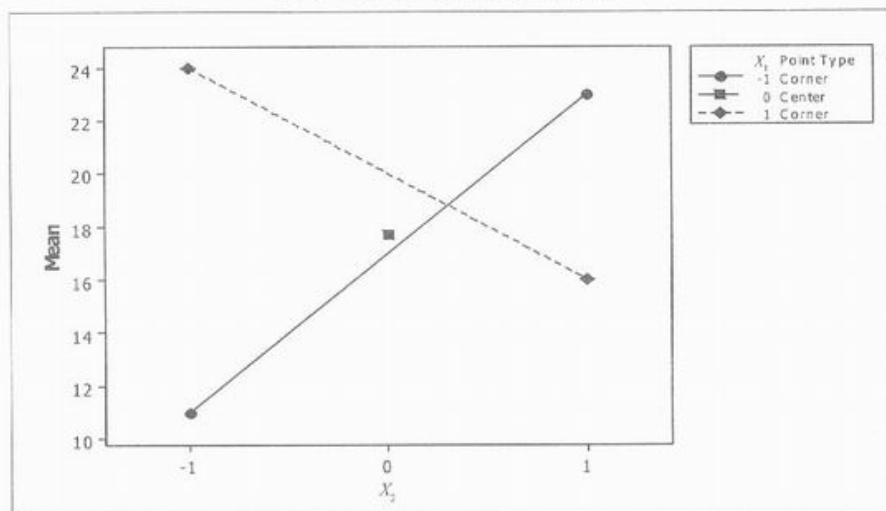


图 9-14 2^2 设计的交互作用图



表 9-13 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	p ($X > T$)
常数		18.273	0.5831	31.34	0.000
A	3.000	1.500	0.6838	2.19	0.064
B	2.000	1.000	0.6838	1.46	0.187
A * B	-10.000	-5.000	0.6838	-7.31	0.000

$R^2 = 89.62\%$, $R^2_{adj} = 85.17\%$

表 9-14 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	p ($X > F$)
主效应	2	26.000	13.000	3.48	0.089
二阶交互作用	1	200.000	200.000	53.47	0.000
误差项	7	26.182	3.740	—	—
曲性	1	1.515	1.515	0.37	0.566
纯误差	6	24.667	4.111	—	—
合计	10	252.182	—	—	—

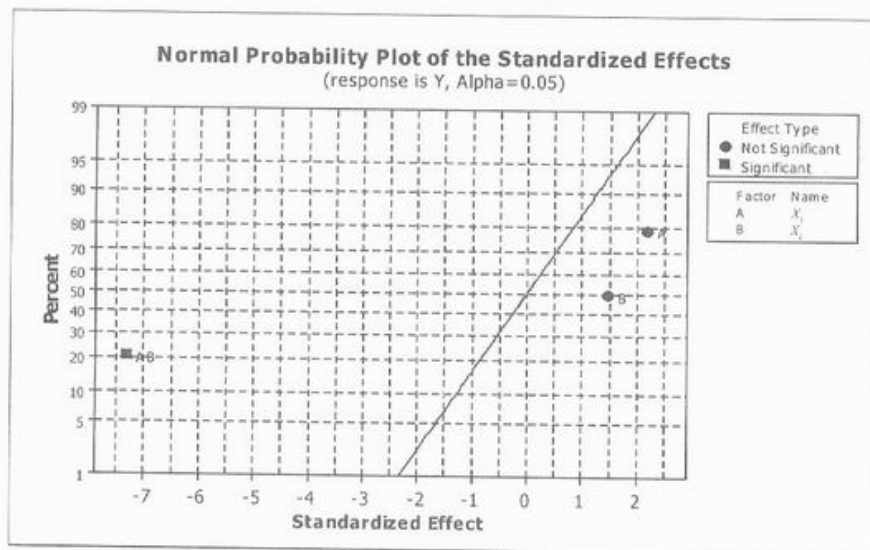


图 9-15 效应估计量的正态概率图

2. 2^3 析因设计

对于 2^3 析因设计, 即有 3 个因子 (如 X_1 、 X_2 和 X_3), 每个因子有 2 个水平 (-1 和 +1)。它的几何解释如图 9-16 所示: 其中外围的 8 个点代表因子



点, 中间的点代表中心点。

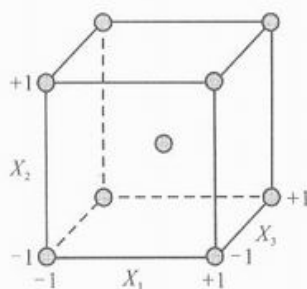


图 9-16 2^3 全因子实验

每一个完全的重复需要 $2^3 = 8$ 次实验, 其实验标准顺序安排如表 9-15 所示。

表 9-15 2^3 设计的实验标准顺序安排表

实验	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	
4	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	
7	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

2^3 析因设计的分析类似于 2^2 析因设计。现举例进行说明: 首先设计实验收集数据。3 个因子 (X_1 , X_2 和 X_3), 每个因子 2 个水平, 重复 3 次实验, 同时加 3 个中心点, 即共需要 $3 \times 2^3 + 3 = 27$ 次实验, 具体实验安排如表 9-16 所示 (按表中第二列的实验顺序进行实验收集数据)。

表 9-16 2^3 设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	中心点	X_1	X_2	X_3	Y
1	10	1	-1	-1	-1	6
2	5	1	1	-1	-1	4
3	25	1	-1	1	-1	10
4	17	1	1	1	-1	7
5	9	1	-1	-1	1	4
6	15	1	1	-1	1	3



续表

标准顺序	实验顺序	中心点	X_1	X_2	X_3	Y
7	11	1	-1	1	1	8
8	23	1	1	1	1	5
9	18	1	-1	-1	-1	7
10	3	1	1	-1	-1	5
11	14	1	-1	1	-1	9
12	4	1	1	1	-1	7
13	19	1	-1	-1	1	5
14	22	1	1	-1	1	3
15	8	1	-1	1	1	7
16	6	1	1	1	1	5
17	21	1	-1	-1	-1	6
18	26	1	1	-1	-1	5
19	1	1	-1	1	-1	8
20	27	1	1	1	-1	6
21	16	1	-1	-1	1	4
22	13	1	1	-1	1	1
23	12	1	-1	1	1	7
24	7	1	1	1	1	4
25	2	0	0	0	0	6
26	24	0	0	0	0	7
27	20	0	0	0	0	6

注：数据收集表省略了交互作用列。

实验定性与定量分析如图 9-17、图 9-18、图 9-19、表 9-17 和表 9-18 所示：从图 9-17 和图 9-18 很明显可以看出因子 X_1 和 X_3 的主效应均为正效应，而因子 X_2 的主效应为负效应，因子 X_1 、 X_2 和 X_3 之间交互作用不显著。该全因子实验的模型为： $\hat{y} = 5.741 - 1.083x_1 + 1.25x_2 - x_3$ ，因子的主效应均很显著（ $P < 0.05$ ），二阶交互作用和三阶交互作用均不显著（ $P > 0.05$ ），这一点也可以通过图 9-19 得到验证（图中主效应是方点，而交互作用是圆点）。同时，可以知道模型的总体拟合良好： $R^2 = 88.62\%$ ， $R^2_{adj} = 87.13\%$ 。表 9-18 表明回归模型中主效应很显著（ $P < 0.05$ ），二阶交互作用和曲性均不显著（ $P > 0.05$ ），三阶交互作用为 0。



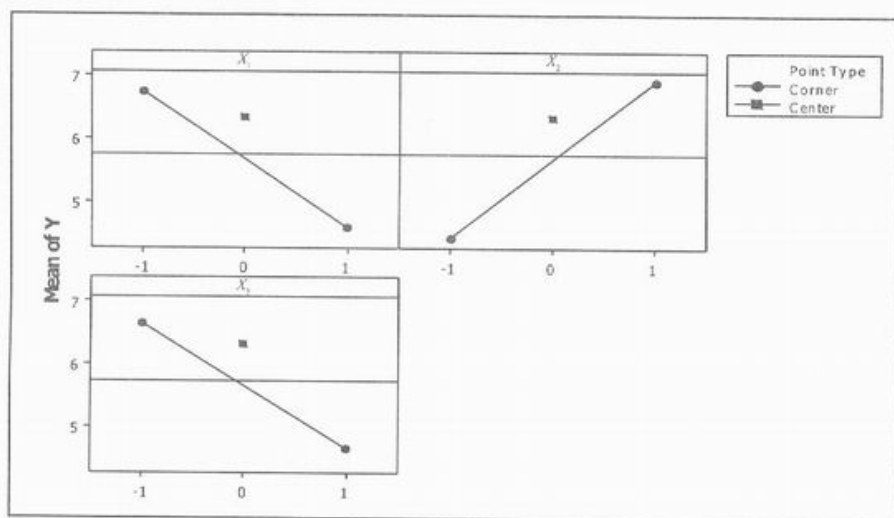
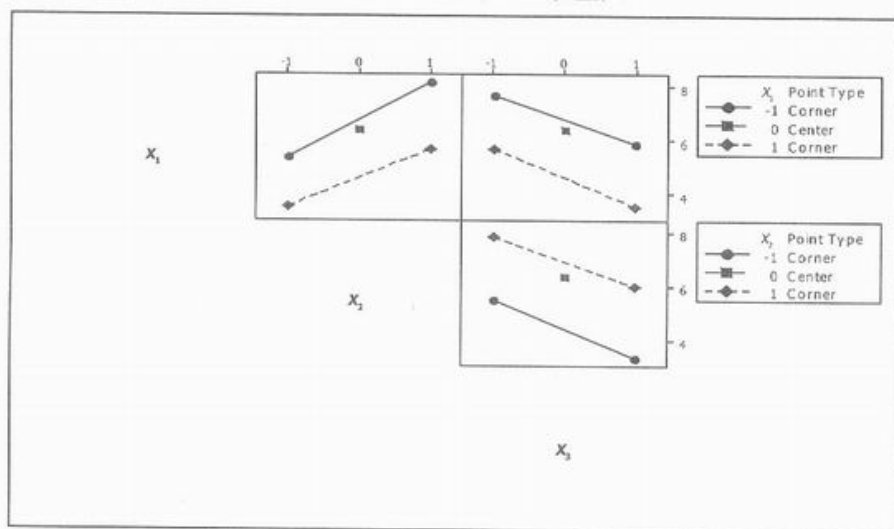
图 9-17 2^3 设计的主效应图图 9-18 2^3 设计的交互作用图

表 9-17 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	$p (X > T)$
常数		5.741	0.1432	40.09	0.000
A	-2.167	-1.083	0.1519	-7.13	0.000
B	2.500	1.250	0.1519	8.23	0.000
C	-2.000	-1.000	0.1519	-6.58	0.000
A × B	-0.333	-0.167	0.1519	-1.10	0.286



续表

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	$p(X > T)$
A * C	-0.167	-0.083	0.1519	-0.55	0.590
B * C	0.167	0.083	0.1519	0.55	0.590
A * B * C	0.000	0.000	0.1519	0.00	1.000

$R^2 = 88.62\%$, $R^2_{adj} = 87.13\%$

表 9-18 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	$p(X > F)$
主效应	3	89.667	29.8889	53.99	0.000
二阶交互作用	3	1.000	0.3333	0.60	0.622
三阶交互作用	1	0.000	0.0000	—	—
误差项	19	10.519	0.5536	—	—
曲性	1	1.185	1.1852	2.29	0.148
纯误差	18	9.333	0.5185	—	—
合计	26	101.185	—	—	—

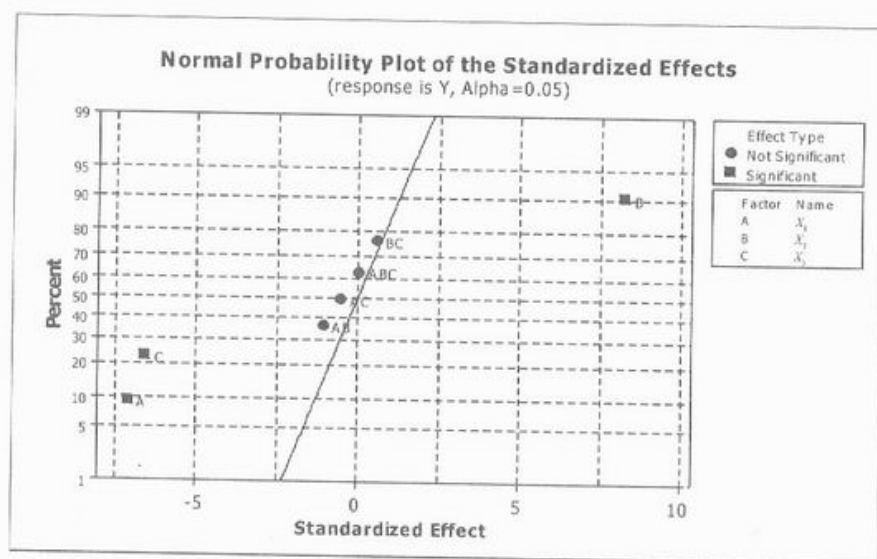


图 9-19 效应估计量的正态概率图

接着我们进行模型诊断：a. 残差正态性检验；b. 异方差检验；c. 响应独立性检验；d. 是否存在减少方差的可能性检验。

图 9-20 中，左边的两个图（残差的正态概率图和直方图）是检验正态性的，如果正态概率图上数据点分布在直线上或附近，则说明我们没有理由去怀疑该模型的正态性假定；如果有数据点严重偏离直线，则说明数据非正



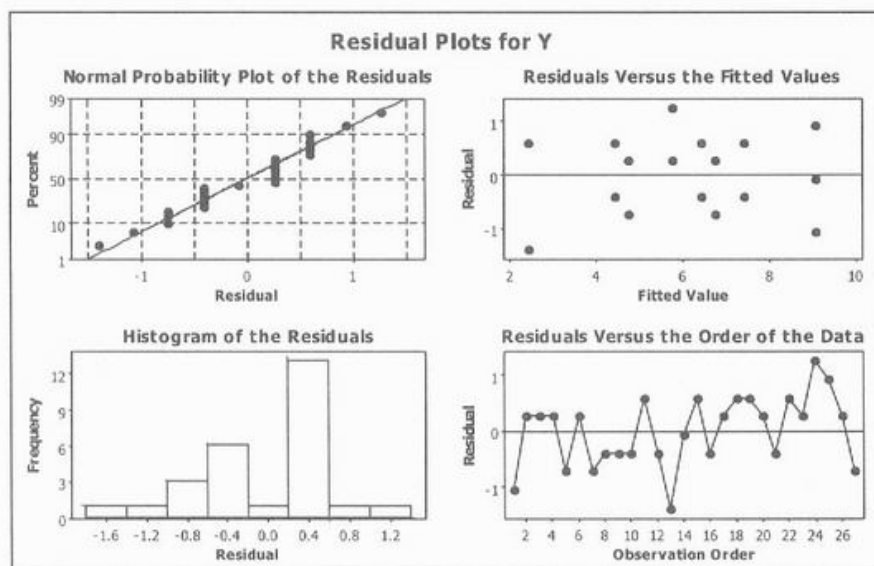
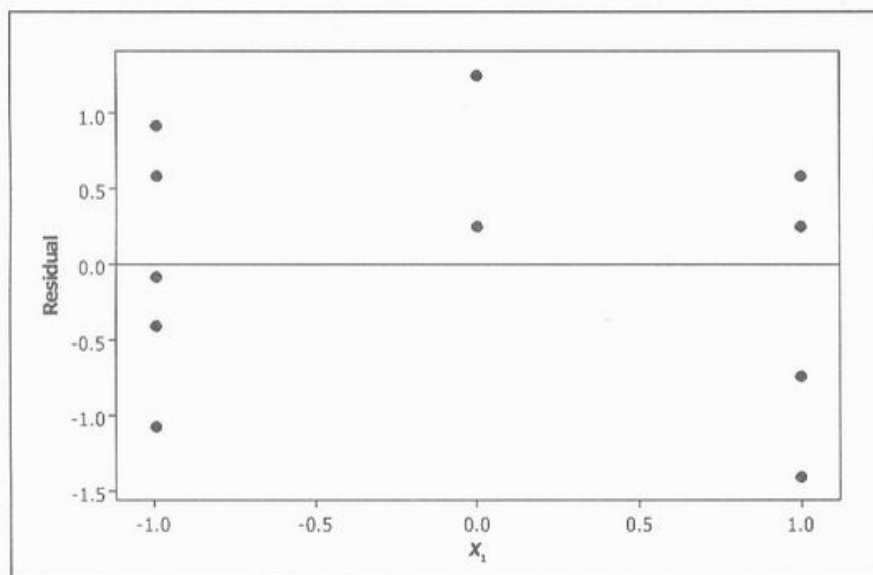


图 9-20 模型诊断（正态性、异方差和独立性）图

图 9-21 残差对因子 X_1 的图

态。右上边的图用于检验方差齐性，针对不同的拟合值，如果数据残差点分布在 0 残差线上下，且大拟合值的残差范围小于小拟合值残差范围的 3 倍，则说明模型的方差齐性假定是合理的；如果大拟合值的残差范围大于小拟合值残差范围的 3 倍，即图上出现大喇叭状，则我们有理由怀疑该模型的方差齐性假定。右下边的图用于检验独立性，若按照实验顺序数据残差随机分布，即在 0 残差线上下随机出现而不具有一定的趋势或规律，则表明实验数据是独立的，模型独立性假定是合理的；如果数据残差明显增大或明显减小，即具有一定的上升或下降趋势，则说明数据非独立。图 9-21、图 9-22 和



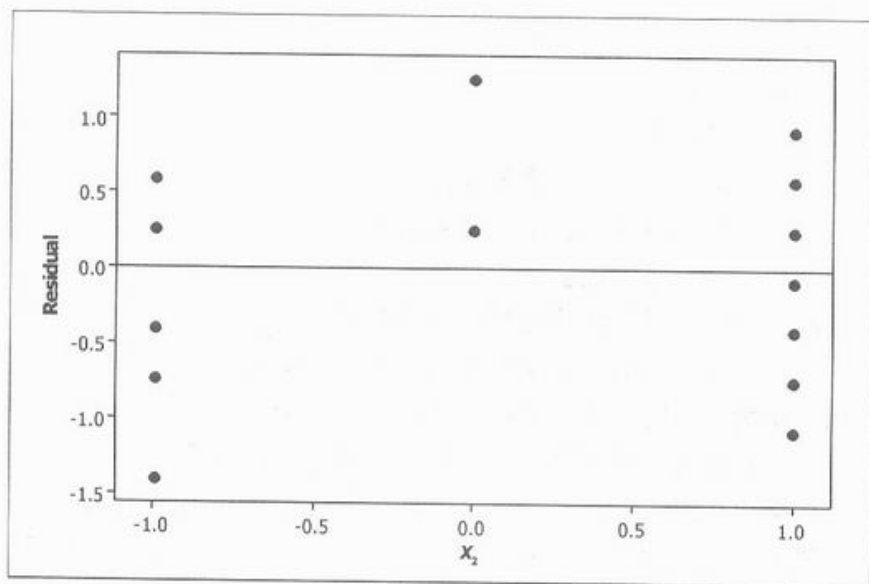
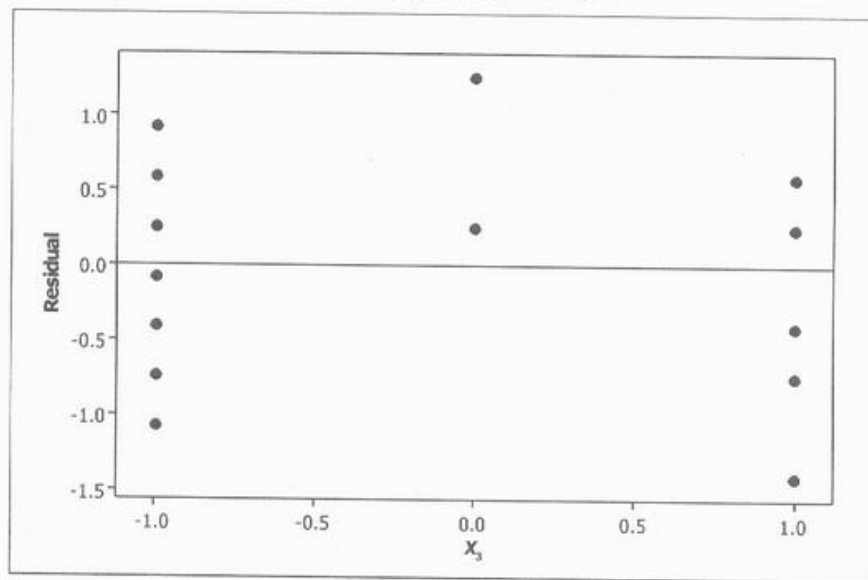
图 9-22 残差对因子 X_2 的图图 9-23 残差对因子 X_3 的图

图 9-23 用于检验是否存在减少方差的可能性, 针对因子的不同水平, 如果残差的变化范围不相等, 说明存在减少方差的可能性。通过上述检验, 我们没有理由去怀疑该模型的正态性假定、独立性假定和方差齐性假定, 同时也不存在方差减小的可能性。

3. 2^k 析因设计

前面提到的分析方法可以推广到 2^k 析因设计, 即有 k 个因子每个因子有





两个水平的情形中去。 2^k 设计的统计模型包括 k 个主效应, C_k^2 个二阶交互作用, C_k^3 个三阶交互作用, …… , 以及一个 k 阶交互作用。也就是说, 对于 2^k 设计来说, 完整的模型含有 $2^k - 1$ 个效应。 2^k 设计的单次重复有时称为无重复的析因设计。对仅有的一次重复, 无法对误差进行估计。一般分析方法是假定某些高阶交互作用可被忽略并将它们的均方组合起来用以估计误差。这要借助于效应稀疏原理, 也就是说, 很多系统, 一些主效应和低阶的交互作用处于支配地位, 而很多高阶交互作用可被忽略。当分析无重复析因设计的数据时, 有时出现真正的高阶交互作用。此时, 将高阶交互作用集中起来作为误差均方使用是不恰当的。Daniel (1959) 提出的将效应的估计量画在一张正态概率纸上的方法是克服这一困难的简便途径。可被忽略的效应是正态分布的, 其均值为 0, 方差为 σ^2 , 趋向于落在图上的一条直线附近, 而显著的效应有非零的均值并且不会落在这一条直线上。具体应用如前面例子的效应的正态概率图所示。

在利用 2 水平析因设计时, 一个潜在的担心是因子效应的线性假定。当然, 严格的线性是不需要的, 甚至当线性假定仅仅相当近似地成立, 2^k 设计也非常令人满意。不过, 在 2^k 析因实验中, 重复某些点的方法将提供对弯曲性的检验, 并可得到一个独立的误差估计。这一方法是在 2^k 设计中加进中心点而构成的。在这点 $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 处做 n 次重复实验。在设计中心处加进重复实验的一个重要理由是: 中心点不影响 2^k 设计中通常的效应估计量。

4. 2^k 析因实验的区组设计

有很多问题, 不可能在一个区组内完成一个完全的析因设计, 其中的区组可能是一天, 一批均匀的原材料, 一间实验室等等。比如一个完全的 2^3 析因设计需要做 8 次实验, 理想的情况是 8 次实验用同一批原材料, 假设一批原材料只能做 4 次实验, 这将意味着需要两批原材料来完成这 8 次实验。区组设计是一种设计方法, 它将一个完全的析因设计安排在多个区组内, 区组的大小比一次重复的处理组合的个数要小。区组设计可以提高实验的精度, 同时它会导致关于某些处理效应 (通常是高阶交互作用) 的信息与来自区组的信息混淆。

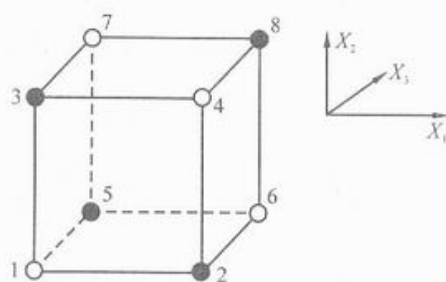
(1) 两个区组的 2^k 析因设计 如果我们要实施一个单次重复的 2^3 析因设计, $2^3 = 8$ 个处理的每一个 (假如) 均需要一定量的原材料, 而每批原材料只够提供 4 个处理组合去实验, 即需要两批原材料。如果把原材料的批看作区组, 则我们必须把 8 种处理组合中的 4 种分派给每个区组。 2^3 析因设计的加减符号表如表 9-19 所示。我们把 $X_1 X_2 X_3$ 中带减号的处理组合分在区组

I, $X_1X_2X_3$ 中带加号的处理组合分在区组 II。所得的设计如图 9-24 所示。注意: 每一个区组内处理组合的实验顺序必须是随机的。该设计三阶交互作用 $X_1X_2X_3$ 和区组混淆。

表 9-19 2^3 设计的加减符号表

实验	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	区组
1	-	-	-	+	+	+	-	I
2	+	-	-	-	-	+	+	II
3	-	+	-	-	+	-	+	II
4	+	+	-	+	-	-	-	I
5	-	-	+	+	-	-	+	II
6	+	-	+	-	+	-	-	I
7	-	+	+	-	-	+	-	I
8	+	+	+	+	+	+	+	II

(2) 四个区组的 2^k 析因设计 我们可以构造与四个区组相混的 2^k 析因实验的区组设计, 每个区组有 2^{k-2} 个处理组合。当因子的个数比较多及区组相对地小时, 此类设计特别有用。为了方便理解和比较, 我们仍以 2^3 析因设计为例。如果我们要实施一个单次重复的 2^3 析因设计, $2^3=8$ 个处理的每一个 (假如) 均需要一定量的原材料, 而每批原材料只够提供两个



○代表区组 I 的处理组合
●代表区组 II 的处理组合

图 9-24 两个区组的 2^3 析因设计

个处理组合去实验, 即需要四批原材料, 则我们必须把 8 种处理组合中的两种分派给每个区组。有一种区组设计如表 9-20 所示, 每一个区组内处理组合的实验顺序是随机的。该设计不是很理想, 因为区组变量的交互作用 $DE = X_1X_2X_3 * X_2X_3 = X_1X_2X_3X_2X_3 = X_1$, 即与实验因子 X_1 的主效应混淆。比较理想的区组设计如表 9-21 所示, 该设计区组变量的交互作用 $DE = X_1X_2 * X_1X_3 = X_1X_2X_1X_3 = X_2X_3$, 即仅与二阶交互作用混淆。同时, 该设计的每一个区组内的两个处理组合互补, 即加减号完全相反。任何一个 2^k 设计均可通过上述方法分解为 2^{k-1} 个区组的设计, 这样的区组设计使得 k 个变量的主效应与区组变量不混淆, 然而所有的二阶交互作用与区组变量混淆。



表 9-20 四个区组的 2^3 设计 (不理想的设计)

实验	实验变量			区组变量		区 组
	X_1	X_2	X_3	$D = X_1 X_2 X_3$	$E = X_2 X_3$	
1	-1	-1	-1	-1	+1	Ⅲ
2	+1	-1	-1	+1	+1	Ⅳ
3	-1	+1	-1	+1	-1	Ⅱ
4	+1	+1	-1	-1	-1	Ⅰ
5	-1	-1	+1	+1	-1	Ⅱ
6	+1	-1	+1	-1	-1	Ⅰ
7	-1	+1	+1	-1	+1	Ⅲ
8	+1	+1	+1	+1	+1	Ⅳ

构造有四个区组的 2^k 析因实验的区组设计的一般方法是选取生成区组的两个效应, 自动地得到被混淆的第三个效应, 它是前两个效应的广义交互作用。需要注意的是, 在选取与区组相混淆的效应时要小心谨慎, 不要把感兴趣的效应混进去, 一般是将高阶交互作用与区组混淆。

表 9-21 四个区组的 2^3 设计 (理想的设计)

实验	实验变量			区组变量		区 组
	X_1	X_2	X_3	$D = X_1 X_2$	$E = X_1 X_3$	
1	-1	-1	-1	+1	+1	Ⅳ
2	+1	-1	-1	-1	-1	Ⅰ
3	-1	+1	-1	-1	+1	Ⅱ
4	+1	+1	-1	+1	-1	Ⅲ
5	-1	-1	+1	+1	-1	Ⅲ
6	+1	-1	+1	-1	+1	Ⅱ
7	-1	+1	+1	-1	-1	Ⅰ
8	+1	+1	+1	+1	+1	Ⅳ

(3) 2^P 个区组的 2^k 析因设计 我们可以将上述方法推广以构造 2^P ($P < k$) 个区组的 2^k 析因设计, 其中每一区组包含 2^{k-P} 个处理组合。我们选取 P 个“独立”的效应 (即不是其他效应的广义交互作用) 与区组相混。另外, 还有 $2^P - P - 1$ 个其他的效应与区组相混淆, 这些效应是原先选取的 P 个独立的效应的广义交互作用。显然, 选取用来生成区组的 P 个效应是关键, 要小心选取与区组相混淆的效应, 不能牺牲了可能有意义的效应的信息。



5. 全因子实验举例

某电子企业在其 SMT 生产过程中对锡浆厚度的要求是 5.5 ~ 8.5mil。长期统计表明,检测工序上有 3% 左右的 PCB 板不合格。分析表明,锡浆印刷工序中锡浆厚度波动太大是造成前线缺陷的首要原因。针对该企业的这一问题,我们采用实验设计的方法进行实验,以期优化工艺参数,从而优化工艺过程。

(1) 确定实验目标 通过优化印锡工序的参数降低 PCB 板的不合格率。

(2) 选择响应输出

响应输出: 锡浆厚度

测量单位: mil (注: 1mil = 0.001in)

响应输出的目标: 7.0mil

测量仪器: 三维激光测厚仪

测量系统能力 ($R\&R\%$): 8%

(3) 确定影响响应输出的主要因子及各主要因子的水平 通过对影响锡浆厚度的因子进行分析,确定了最主要的影响因子,即印刷速度、压力和角度,同时根据工序过程的调整经验,设定了各因子的水平(表 9-22)。

表 9-22 实验中可变的影响因子及水平

因 子	类型	水平		测量单位	是否有中心点
		-1	+1		
印刷速度 (X_1)	计量型	20	40	mm/s	有
压 力 (X_2)	计量型	5	9	kg	有
角 度 (X_3)	计量型	45	75	度	有

(4) 选择实验类型 由于影响因子数目较少且均为连续变量,同时除了三个主因子外,我们不能排除因子间存在交互作用,因此,我们选择两水平全因子实验设计,同时增加三个中心点以便检验线形假设是否成立,并估计模型的拟和误差。

(5) 确定实验策略 多变异分析表明 PCB 板内锡浆厚度变异为主要变异,因此,在设计实验方案时,每次实验在一块 PCB 板上测 5 个点求均值。

(6) 进行实验 按照表 9-23 收集数据(实际做实验时需要按随机化后的顺序,即表中第二列的实验顺序进行实验)。



表 9-23 数据收集表

标准顺序	实验顺序	中心点	X_1	X_2	X_3	Y (厚度均值)
1	10	1	-1	-1	-1	6.95
2	4	1	1	-1	-1	7.8
3	7	1	-1	1	-1	6.4
4	3	1	1	1	-1	6.3
5	8	1	-1	-1	1	7.15
6	2	1	1	-1	1	7.9
7	5	1	-1	1	1	6.55
8	9	1	1	1	1	6.35
9	1	0	0	0	0	6.9
10	6	0	0	0	0	6.85
11	11	0	0	0	0	6.95

(7) 模型拟合和诊断 从图 9-25 和图 9-26 中可以很明显地看出因子 X_1 和 X_3 的主效应为正效应, 而因子 X_2 的主效应为负效应。同时, 因子 X_1 和 X_2 之间存在明显交互作用。从表 9-24 和图 9-27 可知, 因子 X_1 , X_2 和 X_3 的主效应都很显著, 二阶交互作用 $X_1 * X_2$ 也很显著, 其他交互作用则不显著, 曲性也不显著。

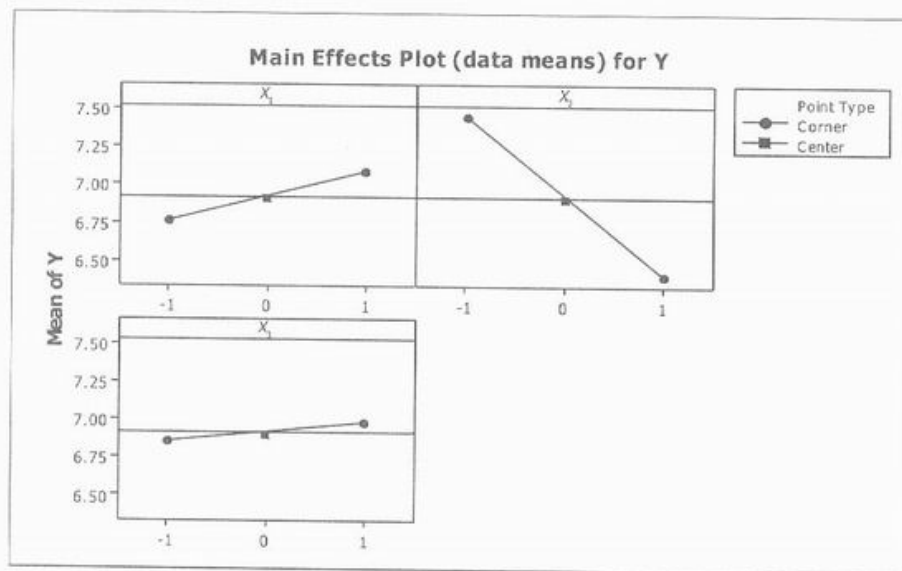


图 9-25 主效应图



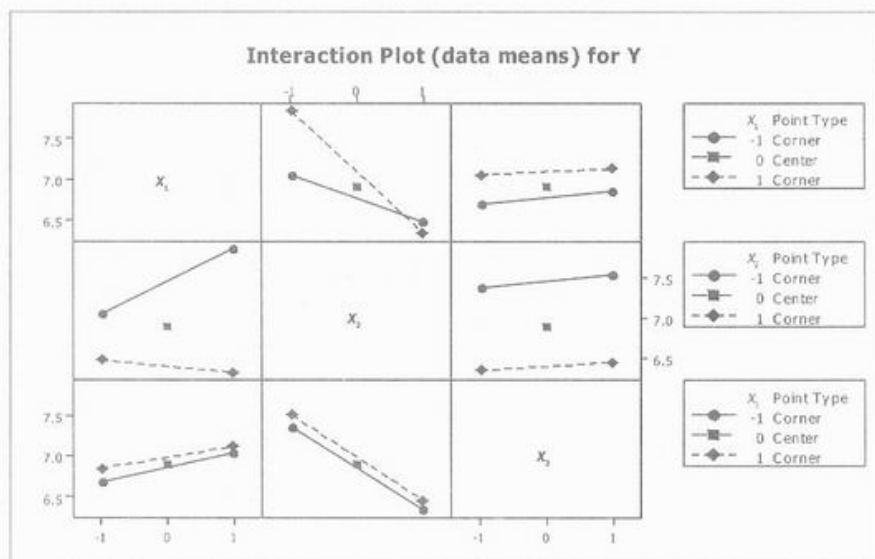


图 9-26 交互作用图

表 9-24 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	P ($X > T$)
常数		6.9182	0.01389	498.19	0.000
X_1	0.3250	0.1625	0.01628	9.98	0.002
X_2	-1.0500	-0.5250	0.01628	-32.24	0.000
X_3	0.1250	0.0625	0.01628	3.84	0.031
X_1X_2	-0.4750	-0.2375	0.01628	-14.59	0.001

表 9-25 方差分析表 (规范变量)

来 源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	P ($X > F$)
主效应	3	2.44750	0.815833	384.61	0.000
二阶交互作用	3	0.45750	0.152500	71.89	0.003
三阶交互作用	1	0.00000	0.000000	*	*
误差项	3	0.00636	0.002121	—	—
曲性	1	0.00136	0.001364	0.55	0.537
纯误差	2	0.00500	0.002500	—	—
合计	10	2.91136	—	—	—

从模型中剔除不显著项重新进行分析和模型拟合, 得到全因子实验的模型:

$$\hat{y} = 6.9182 + 0.1625X_1 - 0.5250X_2 + 0.0625X_3 - 0.2375X_1X_2$$



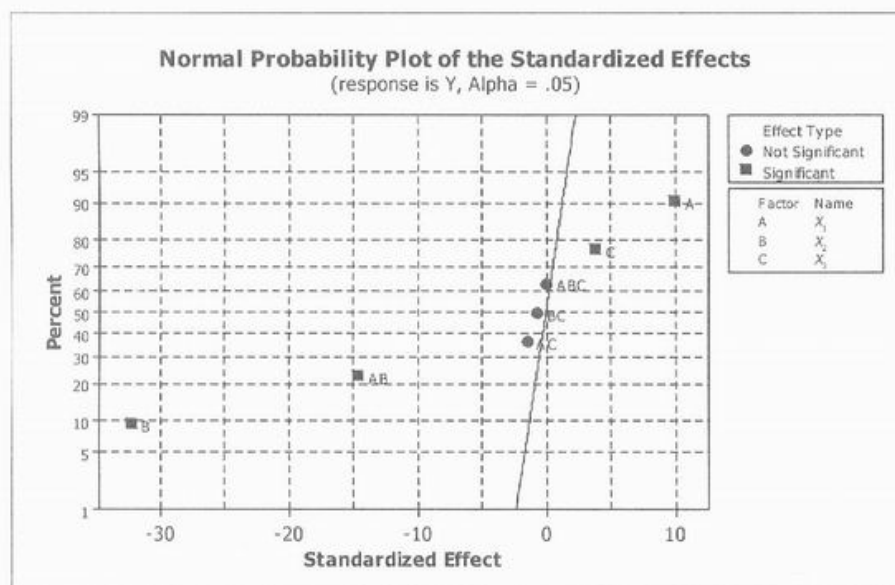


图 9-27 效应估计量的正态概率图

如表 9-26 所示, 剔除非显著项后各效用均很显著 ($P < 0.05$), 这一点也可以通过图 9-28 得到验证。同时, 可以知道模型的总体拟合良好: $R^2 = 99.57\%$, $R^2_{adj} = 99.28\%$ 。表 9-27 表明回归模型中主效应和二阶交互作用很显著 ($P < 0.05$), 曲性和拟合不足均不显著 ($P > 0.05$)。

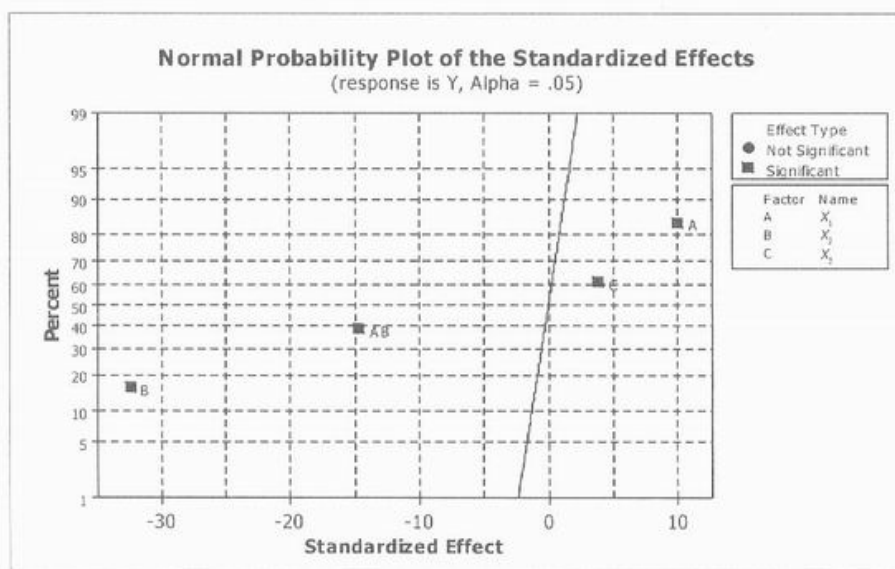


图 9-28 效应估计量的正态概率图

表 9-26 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	P (X > T)
常数		6.9182	0.01389	500.43	0.000
X_1	0.3250	0.1625	0.01628	10.02	0.000
X_2	-1.0500	-0.5250	0.01628	-32.39	0.000
X_3	0.1250	0.0625	0.01628	3.86	0.008
X_1X_2	-0.4750	-0.2375	0.01628	-14.65	0.000

$R^2 = 99.57\%$, $R^2_{adj} = 99.28\%$

表 9-27 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	P (X > F)
主效应	3	2.44750	0.815833	388.07	0.000
二阶交互作用	1	0.45125	0.451250	214.65	0.000
误差项	6	0.01261	0.002102	—	—
曲性	1	0.00136	0.001364	0.61	0.471
拟合不足	3	0.00625	0.002083	0.83	0.586
纯误差	2	0.00500	0.002500	—	—
合计	10	2.91136	—	—	—

接着我们进行模型诊断: a. 残差正态性检验; b. 异方差检验; c. 响应独立性检验; d. 是否存在减少方差的可能性检验。通过上述检验, 我们没有理由去怀疑该模型的正态性假定、独立性假定和方差齐性假定 (图 9-29)。从残差对因子的图形中我们可以看出不存在方差减小的可能性 (图 9-30 至图 9-32)。

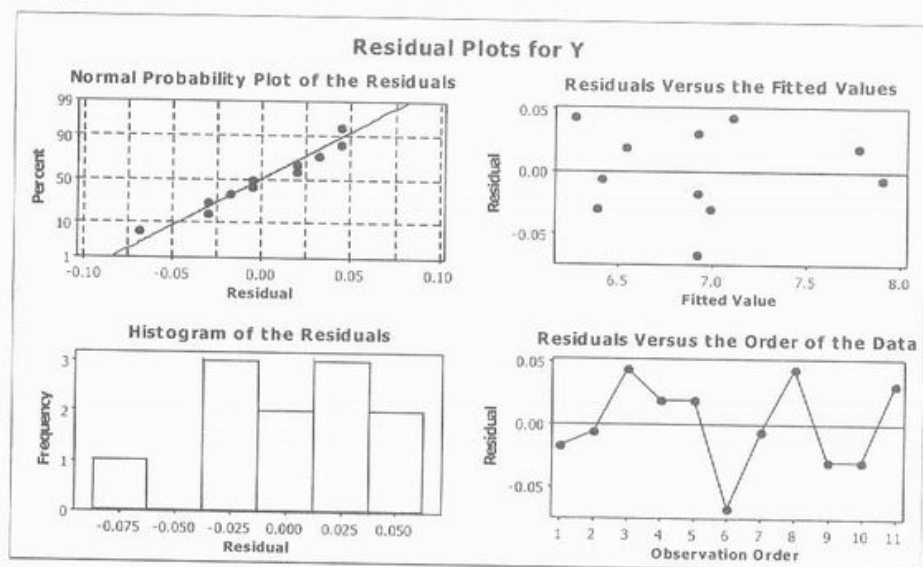
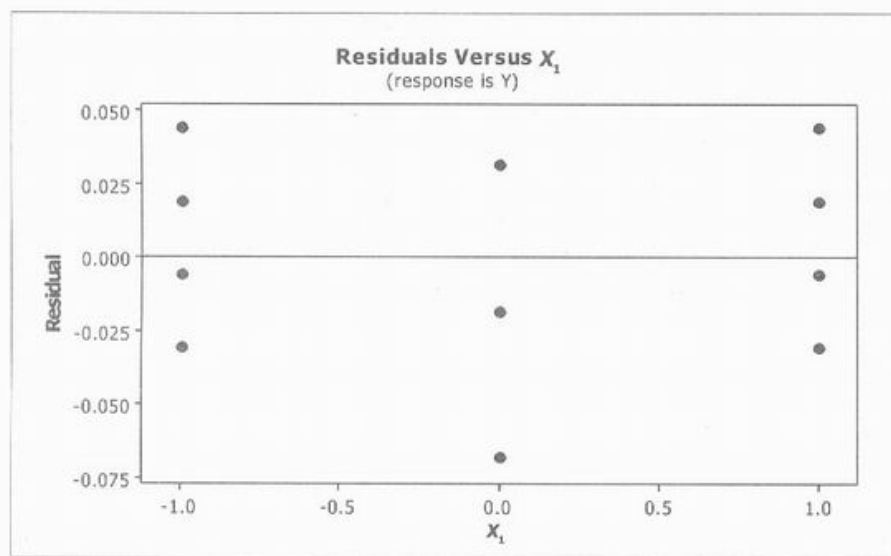
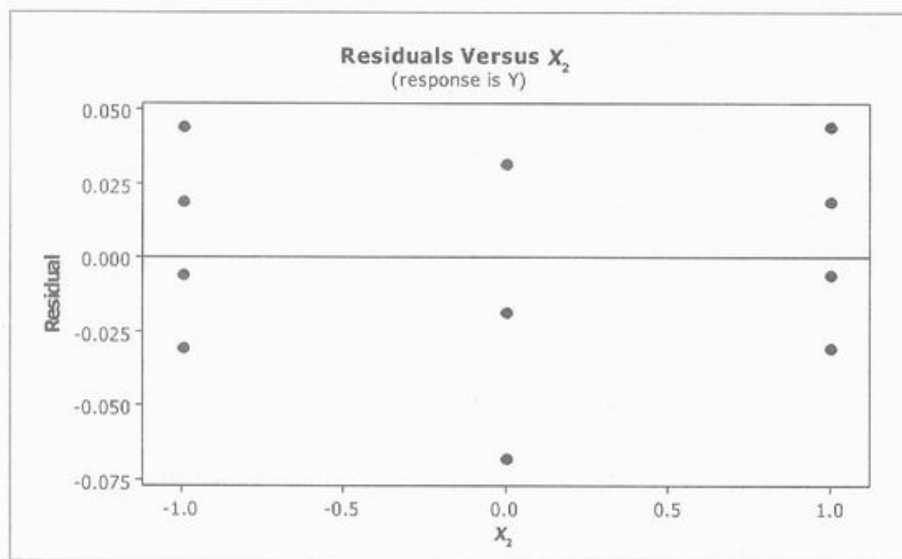


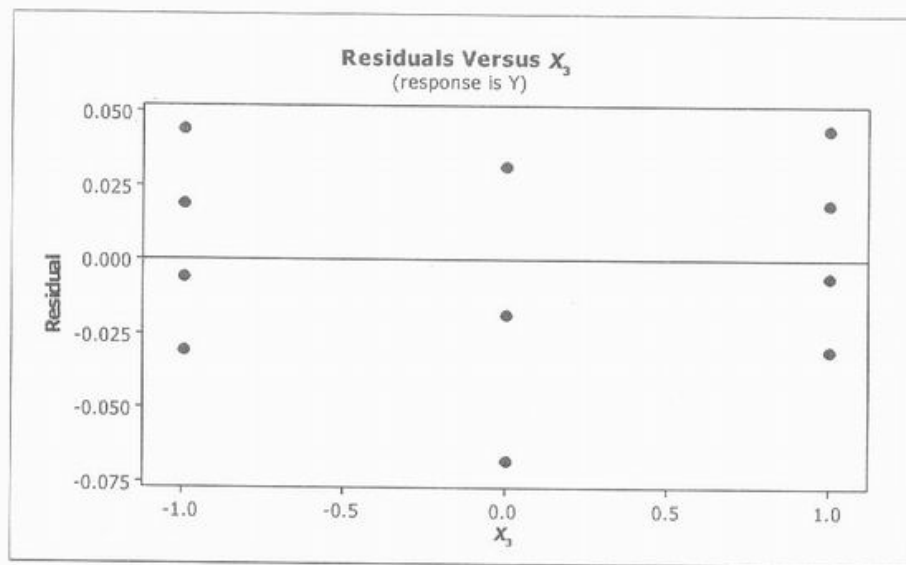
图 9-29 模型诊断 (正态性、异方差和独立性) 图



图 9-30 残差对因子 X_1 的图图 9-31 残差对因子 X_2 的图

(8) 解释模型 通过全因子模型，确定了最优工艺参数，即 $X_1 = 0.0$ (即印刷速度设定为 30mm/s)， $X_2 = -0.0368$ (即压力设定为 6.9264kg)， $X_3 = 1.0$ (即角度设定为 75°)，它可以使锡浆厚度估计值达到目标值 7.0mil。

(9) 验证实验结果 为了验证实验设计结果，在新的工艺参数下从生产线上随机抽取了 20 块 PCB 板，每个板选择 5 个测量点，通过分析发现锡浆厚度比较稳定地分布在 7.0mil 附近，由此导致 PCB 板不合格率降为 1%，效果十分显著。

图 9-32 残差对因子 X_3 的图

第三节 部分因子实验和 RSM 简介

一、部分因子实验简介

1. 部分因子实验的基本原理

当因子个数增加时, 全因子实验设计的一次完全重复所需做的实验次数迅速增大, 以至于超出大多数实验者所拥有的资源。即在实际应用中, 常常由于环境、时间、成本等原因而限制实验次数, 在这种情况下, 部分因子实验显示出它的优越性。部分因子实验 (Fractional Factorial Design of Experiments) 就是在假定高阶交互作用不显著的情况下, 将全因子实验压缩, 获得关于主效应和低阶交互作用的信息。通过部分因子实验中的每一列, 获得几个效应的总和的估计值, 尽管它会导致各因子效应之间出现混淆, 但这种混淆一般都是主效应与高阶交互作用或低阶交互作用与高阶交互作用之间的混淆, 当高阶交互作用可忽略时, 这种混淆就不重要了。G. E. P BOX 和 Hunter 将混淆程度定义为分辨力, 并进行了如下分类:

分辨力 III 设计 即主效应之间互不混淆, 但主效应与二阶交互作用以及交互作用之间存在混淆, 如 2^{3-1}_{III} 设计。

分辨力 IV 设计 主效应之间以及主效应与二阶交互作用之间互不混淆, 但二阶交互作用之间存在混淆, 如 2^{4-1}_{IV} 设计。

分辨力 V 设计 主效应之间, 主效应与二阶交互作用之间, 以及二阶交互



作用之间互不混淆,但二阶交互作用与三阶交互作用之间存在混淆,如 2^{5-1}_V 设计。

分辨力越高,对假定条件的限制就越少,那些假定条件是为了求得对数据的唯一解释而去考虑哪些交互作用可以被忽略。在实际应用中,经常使用分辨率IV和V的设计。

部分因子实验主要用于实验之初的因子筛选阶段。此类实验是要在众多因子中识别出有(如果有的话)大的效应的那些因子,筛选实验通常在项目的早期阶段进行,那时,一开始所考虑的很多因子有可能对响应只有小的效应甚至没有效应;然后,在随后的实验中对那些被识别为重要的因子再进行更为深入的研究,例如进行全因子实验。

部分因子实验得到成功应用是基于以下三点:

① 效应稀疏原理(The sparsity of effects principle)。当有很多变量时,系统或过程很可能被少数几个主因子和低阶交互作用所主宰,即主因子和低阶交互作用真正影响过程质量。

② 投影特性(The projection property)。对于一个部分因子实验,剔除非显著因子后,可投影到一个更强的由显著性因子的子集组成的全因子实验或带仿行的全因子实验中去。

③ 实验的序贯性(Sequential nature)。可以将两个或多个部分因子实验设计序贯地组合成一个实验设计,用来估计所感兴趣的因子效应和交互作用。

2. 部分因子实验的应用条件

- 影响因子的个数在5个以上
- 高阶交互作用项一般不显著
- 响应输出和影响因子间是线性关系
- 为了检查模型是否存在曲性,也尽量在模型中增加中心点
- 部分因子实验主要用来筛选显著因子

二、 2^k 析因实验的部分设计

1. 2^k 析因实验的1/2部分设计

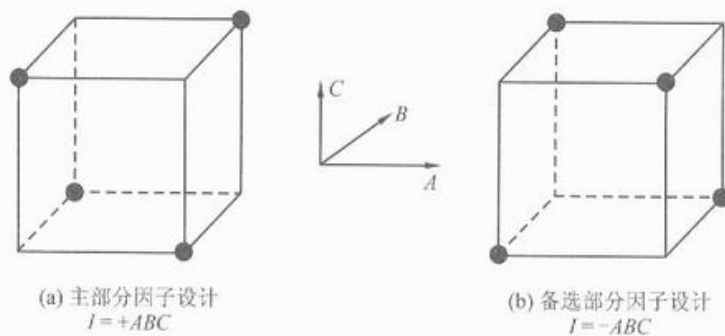
首先考虑 2^3 设计,假如实验者不能承担所有 $2^3=8$ 种处理组合的实验,但他们能承担4次实验,这就提供了一种 2^3 析因实验的1/2部分设计。因为此设计含有 $2^{3-1}=4$ 种处理组合,所以 2^3 析因实验的1/2部分设计常称为 2^{3-1} 析因设计。我们将通过分析 2^3 析因设计的加减符号表(表9-28)来分析 2^{3-1} 设计,此处为了方便表示,以A、B和C代表规范后的因子。



表 9-28 2^3 析因设计的加减符号表

实验	I	因子效应						
		A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
2	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
3	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1

上表中的单位列 I 代表全是加号的向量。 2^3 析因设计含有 2 个 $1/2$ 部分因子设计： $I = +ABC$ 和 $I = -ABC$ 。其中表中的前 4 次实验属于 $I = +ABC$ 部分因子设计，也称主部分因子设计；后 4 次实验属于 $I = -ABC$ 部分因子设计，也称备选部分因子设计（图 9-33）。 2^{3-1} 设计的处理组合有 3 个自由度，可以用来估计主效应。

图 9-33 2^3 析因设计的两个 $1/2$ 部分因子设计

该设计属于分辨力Ⅲ设计，即主效应与二阶交互作用混淆。因此，对于 $I = +ABC$ 部分因子设计，当我们估计主效应 A 、 B 和 C 时，实际上是估计 $A + BC$ 、 $B + AC$ 和 $C + AB$ 。同理，对于 $I = -ABC$ 部分因子设计，当我们估计主效应 A 、 B 和 C 时，实际上是估计 $A - BC$ 、 $B - AC$ 和 $C - AB$ 。在实际应用中，用哪一个部分因子设计无关紧要。两个部分因子设计属于同一种类，它们两个可以形成一个完全的 2^3 析因设计。混淆结构既可以从上面的 2^3 析因设计的加减符号表中看出，也可通过生成器确定。例如，对于生成器 $I = +ABC$ ，





$A * I = A * ABC = A^2 BC = I * BC = BC$, 即 $A = BC$ 。同理可得 $B = AC$, $C = AB$ 。如表 9-29 列出了 2^3 析因设计的两个 $1/2$ 部分因子设计。

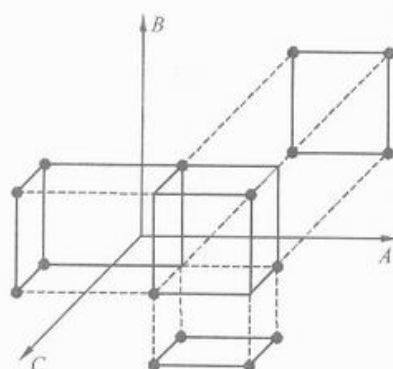
表 9-29 2^3 析因设计的两个 $1/2$ 部分因子设计

实验	完全的 2^2 析因设计 (基本设计)		2^{3-1}_{III} , $I = +ABC$			2^{3-1}_{III} , $I = -ABC$		
	A	B	A	B	$C = +AB$	A	B	$C = -AB$
1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1
2	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
3	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1

对于 2^k 析因实验的 $1/2$ 部分设计, 其最高分辨力构造法如下: 先写出完全 2^{k-1} 析因设计的基本设计, 然后加进用它们的加号水平和减号水平来判定取加号或减号的最高阶交互作用 $ABC \cdots (K-1)$ 作为第 k 个因子。例如, 2^3 析因实验的 $1/2$ 部分设计, 我们先写出完全的 2^2 析因设计作为基本设计, 然后令因子 C 等于 AB 交互作用, 就求得 2^{3-1}_{III} 部分因子设计。其备选部分因子设计令因子 C 等于 $-AB$ 交互作用即得。用生成器 $I = ABC \cdots K$ 解出缺少的列 (K), $K = ABC \cdots (K-1)$ 是第 k 个因子, 其水平由各行中各个因子的符号相乘所得的符号确定。任一交互作用效应都可用来生成第 k 个因子那一列, 但是, 它们与 $ABC \cdots (K-1)$ 相比得不到设计的最高可能的分辨力。

任一分辨力为 R 的部分因子设计包含任一 $R-1$ 个因子的子集的全因子实验设计 (可能有重复的)。因为 2^k 析因设计的 $1/2$ 部分因子设计最大可能的分辨力是 $R = k$, 因此每个 2^{k-1} 部分因子设计可投影到原来 k 个因子的任意 $(k-1)$ 个构成的全因子实验设计上。例如, 对于 2^{3-1}_{III} 设计, 它可以投影到每个两因子子集的 2^2 设计上 (图 9-34)。

现以 2^{5-1}_V 设计举例进行数据分析和模型拟合: 在一集成电路生产线上用 2^{5-1}_V 设计来研究 5 个因子, 目的是改进生产量。5 个因子是 $A =$ 窗口定位 (小, 大), $B =$ 曝光时间 (低于额定的 20%, 高于额定的 20%), $C =$ 冲洗时间 (30s, 45s), $D =$ 屏蔽大小 (小, 大), 以及 $E =$ 蚀刻时间 (14.5min, 15.5min)。 2^{5-1}_V 部分设计的构造如表 9-30 所示, 其中生成器 $I = ABCDE$, 即 $E = ABCD$ 。

9-34 2^{3-1} 设计投影到 3 个 2^2 设计表 9-30 2^{5-1}_V 部分设计的数据收集表

标准顺序	实验顺序	A	B	C	D	E	Y
1	13	-1	-1	-1	-1	1	8
2	4	1	-1	-1	-1	-1	9
3	7	-1	1	-1	-1	-1	34
4	8	1	1	-1	-1	1	52
5	3	-1	-1	1	-1	-1	16
6	1	1	-1	1	-1	1	22
7	6	-1	1	1	-1	1	45
8	16	1	1	1	-1	-1	60
9	5	-1	-1	-1	1	-1	6
10	9	1	-1	-1	1	1	10
11	2	-1	1	-1	1	1	30
12	12	1	1	-1	1	-1	50
13	14	-1	-1	1	1	1	15
14	10	1	-1	1	1	-1	21
15	15	-1	1	1	1	-1	44
16	11	1	1	1	1	1	63





该设计的混淆结构如表 9-31:

表 9-31 2^{5-1}_V 部分设计的混淆结构

2^{5-1}_V 设计, $I=ABCDE$
$I + A * B * C * D * E$
$A + B * C * D * E$
$B + A * C * D * E$
$C + A * B * D * E$
$D + A * B * C * E$
$E + A * B * C * D$
$A * B + C * D * E$
$A * C + B * D * E$
$A * D + B * C * E$
$A * E + B * C * D$
$B * C + A * D * E$
$B * D + A * C * E$
$B * E + A * C * D$
$C * D + A * B * E$
$C * E + A * B * D$
$D * E + A * B * C$

接着进行分析, 如图 9-35、图 9-36 和图 9-37 所示:

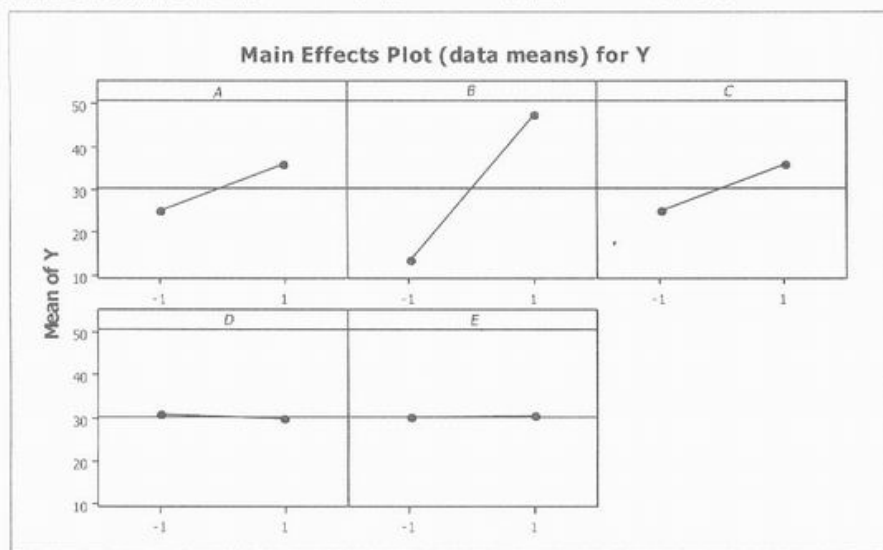


图 9-35 2^{5-1}_V 部分设计的主效应图

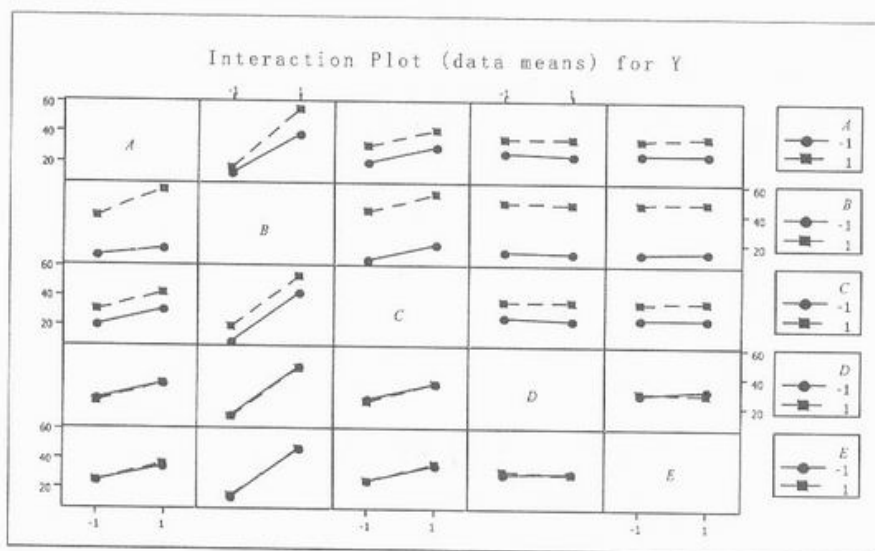
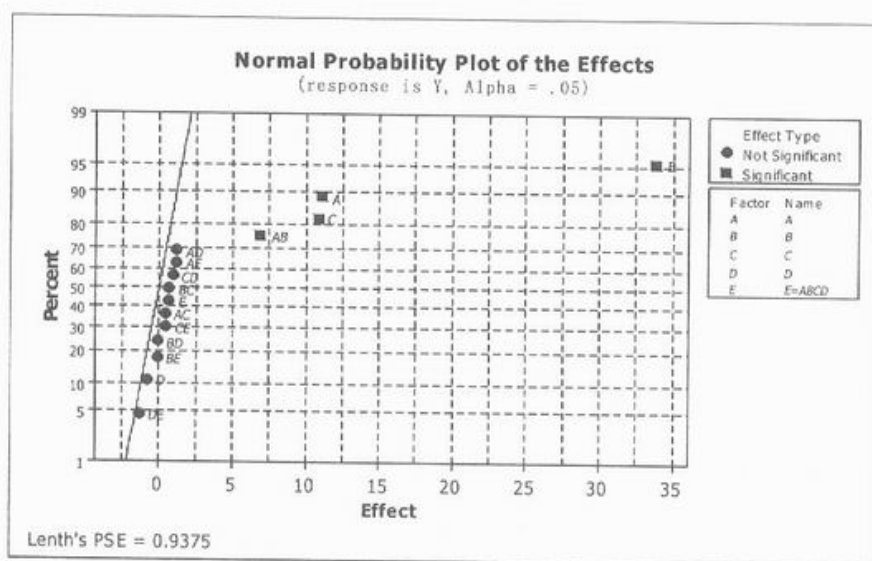
图 9-36 2^{5-1} 部分设计的交互作用图

图 9-37 效应估计量的正态概率图

从上面的图中可以看出, 主效应 A , B 和 C 以及交互作用 AB 很显著, 且因子 A , B 和 C 的主效应均为正效应, 同时因子 A 和 B 均处于高水平时产量较高。但是, 这些效应实际上是 $A + BCDE$, $B + ACDE$, $C + ABDE$, 以及 $AB + CDE$ 。只不过三阶交互作用和三阶以上的交互作用可被忽略, 故对于只有 A , B , C 和 AB 是显著效应的结论, 值得可信。去掉非显著效应, 并进行分析。



表 9-32 效应及模型系数表 (规范变量)

项	效应值 (Δ)	系数 (β)	系数的标准误	T 统计量	P ($X > T$)
常数		30.313	0.4002	75.74	0.000
A	11.125	5.562	0.4002	13.90	0.000
B	33.875	16.937	0.4002	42.32	0.000
C	10.875	5.437	0.4002	13.59	0.000
A * B	6.875	3.438	0.4002	8.59	0.000

 $R^2 = 99.51\%$, $R_{adj}^2 = 99.33\%$

表 9-33 方差分析表 (规范变量)

来源	自由度 (DF)	离差平方和 (SS)	均方 (MS)	F 统计量	P ($X > F$)
主效应	3	5558.19	1852.73	723.02	0.000
二阶交互作用	1	189.06	189.06	73.78	0.000
误差项	11	28.19	2.56	—	—
拟合不足	3	9.69	3.23	1.40	0.313
纯误差	8	18.50	2.31	—	—
合计	15	5775.44	—	—	—

拟合的模型是

$$\hat{Y} = 30.313 + 5.552X_1 + 16.937X_2 + 5.437X_3 + 3.438X_1X_2$$

该模型的总体拟合良好 $R^2 = 99.51\%$ $R_{adj}^2 = 99.33\%$

注意: 该模型中的 X 用的是编码数据, 不是原始数据。

接着我们进行模型诊断: a. 残差正态性检验; b. 异方差检验; c. 响应独立性检验; d. 是否存在减少方差的可能性检验。

通过上述检验, 我们没有理由去怀疑该模型的正态性假定、独立性假定和方差齐性假定 (图 9-38)。从残差对因子的图形中我们可以看出因子 A 和 C 处于高水平时存在方差减小的可能性 (图 9-39 至图 9-41)。

2. 一般的 2^{k-p} 部分因子设计

含有 2^{k-p} 个实验的 2^k 部分因子设计叫做 2^k 设计的一个 $1/2^p$ 部分设计, 即 2^{k-p} 部分因子设计。这些设计需要选取 p 个独立的生成元。设计的完全定义关系由原来选好的 p 个生成元以及它们的 $2^p - p - 1$ 个广义交互作用所组成。其混淆结构由各个效应列乘以完全定义关系求得。实际选取生成元时要当心, 不要使感兴趣的效应相互混淆。生成元的选取要使得能够得到最好可能的混淆



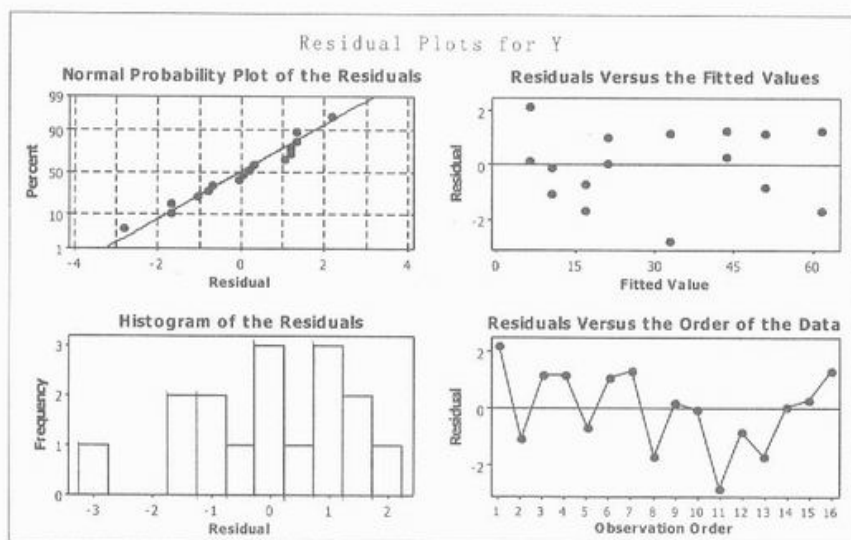


图9-38 模型诊断(正态性、异方差和独立性)图

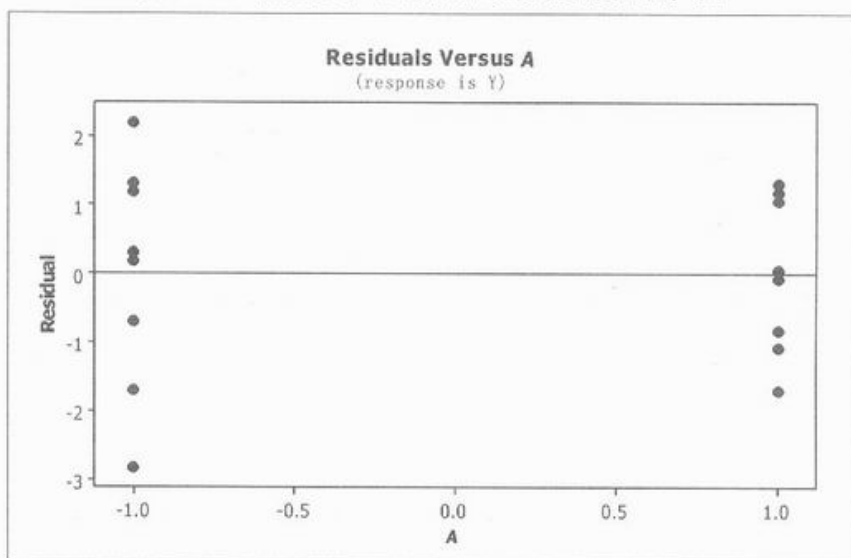


图9-39 残差对因子A的图

结构,即要使 2^{k-p} 设计有最大可能的设计分辨率。每个效应与另外的 $2^p - 1$ 个效应混淆。对中等大的 k 值,通常假定较高阶交互作用(三阶及三阶以上)可被忽略,这将使混淆结构大大简化。对于 $k \leq 11$ 个因子和最多为 $n \leq 128$ 次实验,表9-34列出了 2^{k-p} 部分因子设计的选取方法,此表建议取的生成元可使设计有最大可能的分辨率。



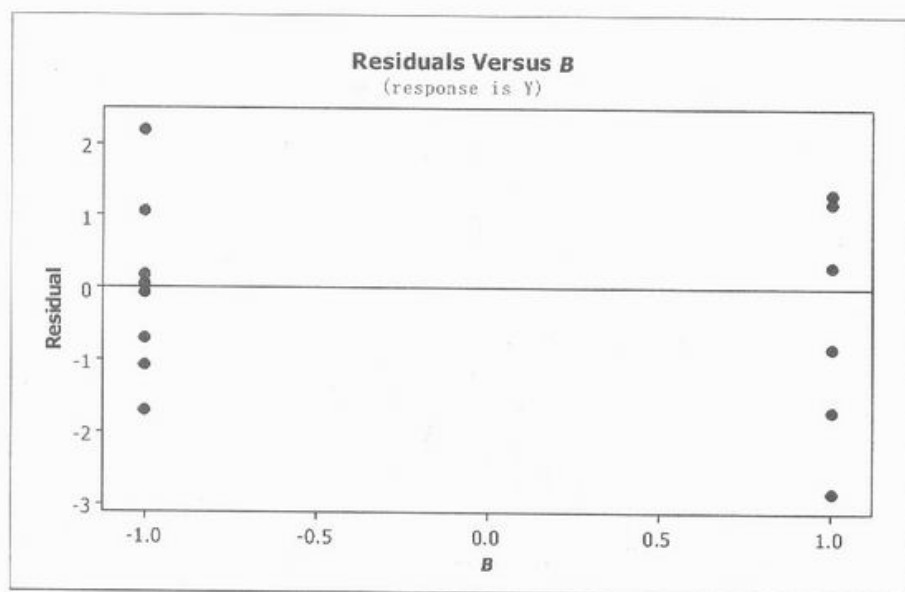


图 9-40 残差对因子 B 的图

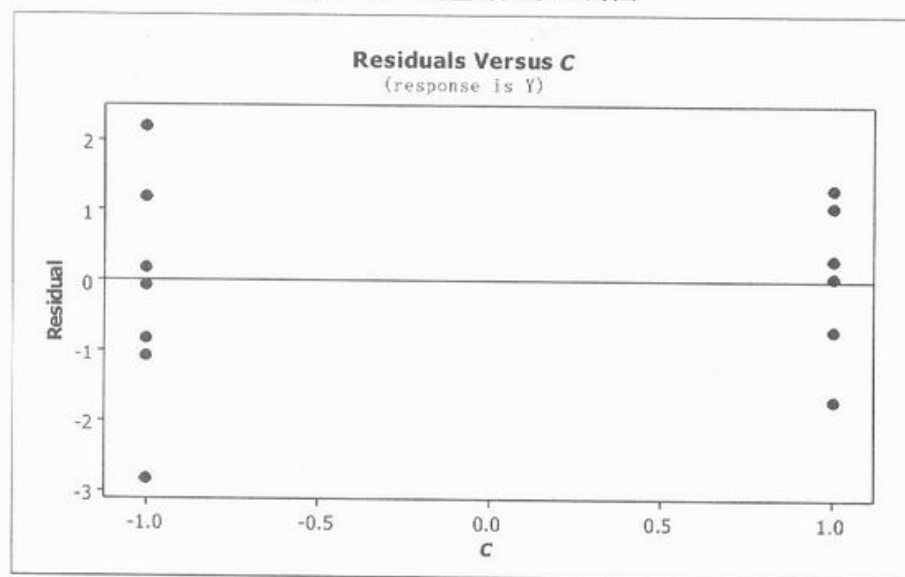


图 9-41 残差对因子 C 的图

表 9-34 可选的 2^{k-p} 部分因子设计

因子个数 (k)	部分因子设计	实验次数	设计的生成元
3	2_{III}^{3-1}	4	$C = \pm AB$
4	2_{IV}^{4-1}	8	$D = \pm ABC$
5	2_V^{5-1}	16	$E = \pm ABCD$
	2_{III}^{5-2}	8	$D = \pm ABE = \pm AC$

因子个数 (k)	部分因子设计	实验次数	设计的生成元
6	2_{VI}^{6-1}	32	$F = \pm ABCDE$
	2_{IV}^{6-2}	16	$E = \pm ABC \quad F = \pm BCD$
	2_{III}^{6-3}	8	$D = \pm AB \quad E = \pm ACF = \pm BC$
7	2_{VII}^{7-1}	64	$G = \pm ABCDEF$
	2_{IV}^{7-2}	32	$F = \pm ABCD \quad G = \pm ABDE$
	2_{IV}^{7-3}	16	$E = \pm ABC \quad F = \pm BCD \quad G = \pm ACD$
	2_{III}^{7-4}	8	$D = \pm AB \quad E = \pm AC \quad F = \pm BC \quad G = \pm ABC$
8	2_{V}^{8-2}	64	$G = \pm ABCD \quad H = \pm ABEF$
	2_{IV}^{8-3}	32	$F = \pm ABC \quad G = \pm ABD \quad H = \pm BCDE$
	2_{IV}^{8-4}	16	$E = \pm BCD \quad F = \pm ACD \quad G = \pm ABC \quad H = \pm ABD$
	2_{VI}^{9-2}	128	$H = \pm ACDFG \quad J = \pm BCEFG$
9	2_{IV}^{9-3}	64	$G = \pm ABCD \quad H = \pm ACEF \quad J = \pm CDEF$
	2_{IV}^{9-4}	32	$F = \pm BCDE \quad G = \pm ACDE \quad H = \pm ABDE \quad J = \pm ABCE$
	2_{III}^{9-5}	16	$E = \pm ABC \quad F = \pm BCD \quad G = \pm ACD \quad H = \pm ABD \quad J = \pm ABCD$
	2_{V}^{10-3}	128	$H = \pm ABCEG \quad J = \pm ACDE \quad K = \pm ACDF$
10	2_{IV}^{10-4}	64	$G = \pm BCDF \quad H = \pm ACDF \quad J = \pm ABDE \quad K = \pm ABCE$
	2_{IV}^{10-5}	32	$F = \pm ABCD \quad G = \pm ABCE \quad H = \pm ABDE \quad J = \pm ACDE \quad K = \pm BCDE$
	2_{III}^{10-6}	16	$E = \pm ABC \quad F = \pm BCD \quad G = \pm ACD \quad H = \pm ABD \quad J = \pm ABCD$ $K = \pm AB$
	2_{IV}^{11-5}	64	$G = \pm CDE \quad H = \pm ABCD \quad J = \pm ABF \quad K = \pm BDEFL = \pm ADEF$
11	2_{IV}^{11-6}	32	$F = \pm ABC \quad G = \pm BCD \quad H = \pm CDE \quad J = \pm ACD \quad K = \pm ADE \quad L = \pm BDE$
	2_{III}^{11-7}	16	$E = \pm ABC \quad F = \pm BCD \quad G = \pm ACD \quad H = \pm ABD \quad J = \pm ABCD \quad K = \pm AB \quad L = \pm AC$

3. 分辨力为Ⅲ、Ⅳ和Ⅴ的设计

对只有 N 次实验和最高可到 $k = N - 1$ 个因子的情况, 可以构造分辨力为Ⅲ的设计, 其中 N 是 4 的倍数。这里主要讲 N 是 2 的幂的实验。特别重要的设计是最多为 3 个因子但只需要 4 次实验的设计, 最多为 7 个因子但只需要 8 次实验的设计, 最多为 15 个因子但只需要 16 次实验的设计。当 $k = N - 1$ 时, 部分因子设计叫做饱和设计。分辨力为Ⅲ的设计中, 主效应与二阶交互作用混淆, 为了分离出主效应, 可利用部分因子设计的序贯装配。假定我们对一





个分辨力为Ⅲ的部分因子设计加进将此设计的所有因子都取反号的第二个设计,将打破主效应和二阶交互作用之间的混淆,使我们可以用组合的设计来估计与任何二阶交互作用脱离开来的所有的主效应,该设计方法叫做对设计进行折叠。

Plackett 和 Burman (1946) 提出的 Plackett - Burman 设计是为在 N 次实验中研究 $k = N - 1$ 个变量的二水平部分因子设计,其中 N 是 4 的倍数。它主要研究的是 N 不是 2 的幂的情况,即 $N = 12, 20, 24, 28$ 和 36 等。当主效应和二阶交互作用相互不接触以及某些二阶交互作用互为别名(混淆)时, 2^{k-p} 部分因子设计是分辨力为Ⅳ的设计;当三阶交互作用和更高阶交互作用不显著被删掉时,在 2^{k-p}_W 设计中就可以直接估计主效应。任一个 2^{k-p}_W 设计至少含有 $2k$ 次实验。分辨力为Ⅳ的设计可以用折叠方法从分辨力为Ⅲ的设计求得。折叠一个 2^{k-p}_W 设计,就是简单地把取反号的第二个部分因子设计和原来的部分因子设计相加。分辨力为Ⅴ的设计的主效应和二阶交互作用不与其他的主效应和二阶交互作用混淆。该设计是非常强的设计,当三阶交互作用和更高阶交互作用不显著可被忽略时,该设计可单独估计出所有的主效应和二阶交互作用。

三、RSM 简介

1. RSM 的基本原理

响应曲面方法 (Response Surface Methodology, RSM) 是数学方法和统计方法结合的产物,是用来对所感兴趣的响应受多个变量的影响的问题进行建模和分析的,其目的是优化这个响应。它是一系列有效的发展、提高和优化过程的统计和数学方法技术的集合。它最早由 Box 和 Willson 提出理论基础,经过 Hill 和 Hunter 整理发展,于 1966 年建立更广泛的响应曲面定义和最优化模式。响应曲面方法不但在设计和发展新产品方面有重要作用,而且对于现有产品设计的改进方面也很有效。在大多数 RSM 的问题中,响应输出和影响因子之间的关系形式是未知的。这样一来,RSM 的第一个步骤就是寻求因变量和自变量集合之间的真实函数关系的一个合适的逼近式。通常,在自变量的某一区域内的一个低阶的多项式是可用的。如果响应适用于用自变量的线性函数建模,则近似函数是一阶模型

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (9-19)$$

如果系统有弯曲,则必须用更高阶的多项式,例如二阶模型

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \varepsilon \quad (9-20)$$

几乎所有的 RSM 问题都用这些近似多项式中的一个或多个。当然,一个多项

式模型在自变量的整个空间上是真实函数关系的合理的近似式是不可能的,但在一个相对小的区域内通常做的很好。

最小二乘法可以用来估计近似多项式的参数,然后在拟合曲面上做响应曲面分析。如果拟合曲面是真实响应函数的一个合适的近似式,则拟合曲面的分析就近似的等价于实际系统的分析。如果能够适当地利用实验设计来收集数据,就能够最有效地估计模型参数。关于拟合响应曲面的设计叫做响应曲面设计。

RSM 是一个序贯方法。首先是确定哪些变量或者因子是重要的。这一步里面要把那些不重要的变量删除掉。一旦重要的变量确定下来,实验者的目的就是判断在自变量现有的水平下,响应值离最优点到底是近还是远。如果在现有的自变量的水平下,响应值不是最优的,那么实验者就将通过一系列的调整来把这些过程变量向着最优值的方向移动。通常,当我们是在响应曲面相应的自变量区域内的某个点时,在此点处系统只有微小的弯曲,从而用一阶模型是恰当的。那么我们就要快速而有效地到达最优点所在的邻近区域,一般使用最速上升法。一旦最优点的区域被找到,就可以利用更精细的模型,例如二阶模型,并进行分析以便确定最优点的位置,即过程的最优条件,以及进一步的分析。响应曲面的分析法可以想像为“爬山”一样,山顶代表响应的最大值点。如果真实的最优点是响应的最小值点,则可设想为“落进山谷”。RSM 的最终目的是确定系统的最优运行条件或确定因子空间中满足运行规范的区域,不是用来了解系统的实际机制,尽管 RSM 有助于得到这类知识。而且 RSM 的“最优”是按特定的意义使用的,它的“爬山”方法只能保证收敛于局部的最优点。

2. 响应曲面方法与全因子实验和部分因子实验的区别

(1) 全因子实验和部分因子实验所构造的模型为一阶模型

$$Y = \beta_0 + \sum \beta_i X_i + \sum \sum \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon \quad (9-21)$$

在没有交互作用情形下的模型为纯一阶模型

$$Y = \beta_0 + \sum \beta_i X_i \quad (9-22)$$

但是,响应输出和其影响因子之间的关系并不一定就是线性的,大多数情况下都是复杂的非线性关系,如二阶模型

$$Y = \beta_0 + \sum \beta_i X_i + \sum \sum \beta_{ij} X_i X_j + \sum \beta_{ii} X_i^2 + \varepsilon \quad (9-23)$$

这时,我们用响应曲面方法来进行参数优化,其模型曲面的对比如图 9-42。

(2) 全因子实验和部分因子实验假设响应输出与影响因子之间是“线性” 尽管实验中可以增加中心点,但增加中心点后只能检验模型是否存在



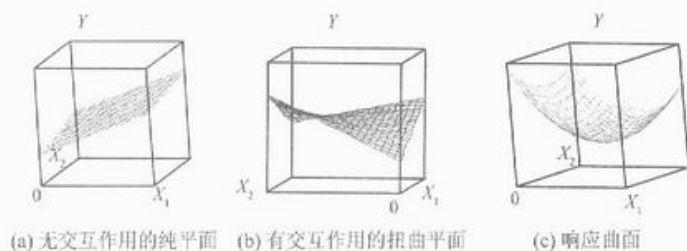


图 9-42 因子实验 (a 和 b) 和响应曲面 (c) 模型

曲性, 并不能估计出二次项。在曲性显著的情况下, 难以对响应进行优化。响应曲面方法没有“线性”假设, 可以直接估计出二次项, 对问题进行优化。

3. 响应曲面方法的应用

响应曲面方法在解决工业问题上很有效, 一般而言, 可以将其应用分成三个主要方面。

(1) 在感兴趣的区域上确定响应曲面的形状 如果未知的响应函数在当前的可行域上被成功的拟合出来, 那么实验者就可以预测当条件改变的时候响应能够发生的变化;

(2) 优化响应 在工业应用中, 一个很重要的问题就是决定优化过程的条件。实验者能够通过 RSM 确定最优条件的水平和最优的响应;

(3) 按照顾客的特殊要求选择操作的条件 大多数响应曲面问题都会要求几个响应同时达到要求。

4. 响应曲面方法的阶段设计和一般流程

RSM 具有序贯性特点, 主要由以下几个阶段顺序完成。

第一阶段 运用工程技术知识和经验知识, 如因果分析图。识别影响质量特征值的各个因子, 并将其中的定量值因子按照影响质量特征值的程度排列, 然后选择有重要影响的 10 个以下因子 (一般 7 个以下) 进行部分因子实验, 从所列出的众多因子中找出关键因子。称这一阶段为筛选实验。

第二阶段 对找出的关键因子在选定的实验区域内进行因子实验, 在实验过程中, 拟合一个一阶线性函数, 对函数进行拟合不良性检验或曲性检验。如果拟合不良不显著, 说明所拟合的函数可近似表示响应变量和输入变量的真实关系, 如显著, 则转第四阶段。

第三阶段 从该实验中心点, 以一定步长按照最速上升或最速下降方向进行实验, 直到在某实验点上响应值不再有明显的改善。以该点为新的实验区域中心点, 重复第二阶段和第三阶段。

第四阶段 一阶线性模型拟合不良显著, 表明在当前实验区域存在凸点和



凹点, 函数 $Y = g(X) + \varepsilon$ 须由二阶或更高阶模型和拟合。然后, 对该二阶线性模型进行拟合不良检验, 如拟合不良不显著, 表明在该区域内, 这个二阶线性模型可近似表示响应变量和输入变量的真实关系。

第五阶段 对拟合的二阶线性模型进行分析, 求出稳定点。当特征值均大于 0 时, 该点为最小值点; 当特征值均小于 0 时, 这个稳定点为最大值点; 当特征值有的大于 0, 有的小于 0 时, 该稳定点为鞍点。如果特征值中有一个或几个的绝对值接近于 0, 则该系统为一岭系统。为了更直观的了解各因子对响应变量的影响, 绘制响应曲面图和等高线图。如稳定点位于实验区域, 表明该点为最优值点, 如稳定点在实验区域外, 则为继续进行实验探索指明了方向。

上面描述了响应曲面方法的阶段设计步骤, 下面将这些步骤及其顺序关系用流程图的形式描绘出来 (图 9-43)。

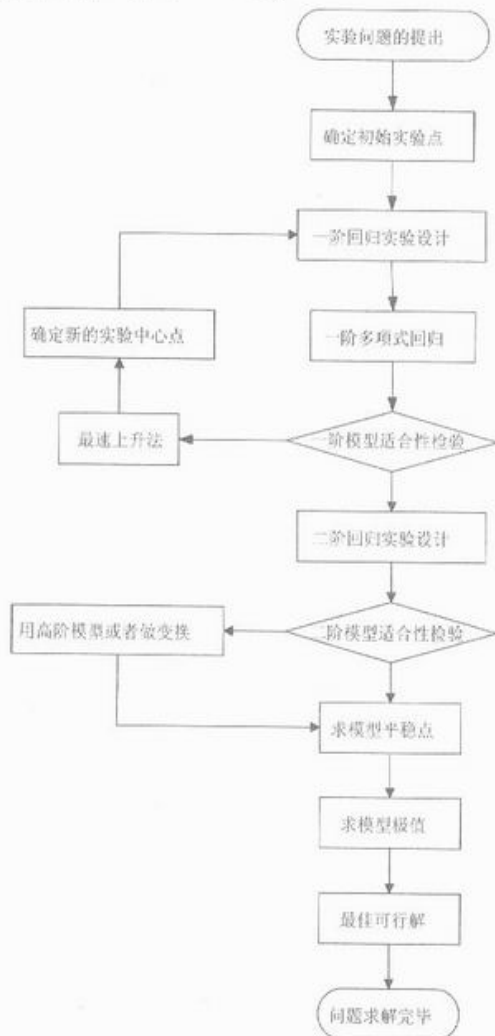


图 9-43 响应曲面方法的一般流程图



5. 拟合二阶模型的设计

鉴于篇幅所限, 拟合一阶模型的设计和最速上升法将不在此展开讨论, 而是简要讨论一下拟合二阶模型的设计。二阶模型设计的主要目的就是要令实验者能够拟合二阶模型

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \varepsilon$$

上述模型包含了 $1 + 2k + k(k-1)/2$ 个参数。也就是说设计点数不可能比它还要少, 而且对于拟合二阶模型的实验设计, 每个因子必须至少要有三个水平。有很多设计可用于拟合二阶模型。对于一阶模型, 正交性是最优的设计性质, 因为它能够使回归系数的方差极小化。在一阶情形, 正交性也是理想的, 因为它对于预测响应的方差 $V(\hat{y})$ 也能导出十分美好的性质。如果在点 x 处预测响应 \hat{y} 的方差仅是点到设计中心的距离的函数而不是方向的函数, 那么这样的实验设计叫做可旋转的。在选择响应曲面设计中, 可旋转性是十分重要的性质。因为响应曲面方法的目的是在于优化, 而最优点的位置在做实验之前是未知的, 可旋转的意义就在于使所使用的设计在各个方向上提供等精确度的估计。

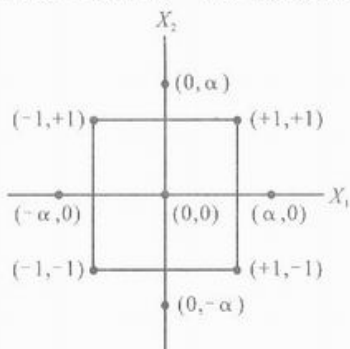


图 9-44 $k=2$ 的中心复合设计

(1) 中心复合设计 对于拟合二阶响应曲面, 中心复合设计 (Central Composite Designs, CCDs) 无疑是用得最广泛的实验设计。中心复合设计由 2^k 全因子设计或部分因子设计 (规范为通常的 ± 1 记号) 增加 $2k$ 个坐标轴点 $(\pm \alpha, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm \alpha, 0, \dots, 0)$, $\dots, (0, 0, \dots, \pm \alpha)$ 和 n_c 个中心点 $(0, 0, \dots, 0)$ 所组成。 $k=2$ 的中心复合设计如图 9-44 所示。恰当

的选择 α 可使中心复合设计具有可旋转性。满足可旋转性要求的 α 值依赖于设计的析因部分因子点的个数; 事实上, $\alpha = (n_f)^{1/4}$ 能产生可旋转的中心复合设计, 其中 n_f 是用于设计的析因部分因子点的个数。例如, 假设一个实验有两个因子, 那么它的析因部分有 $n_f = 2^2 = 4$ 个因子点。于是, 满足可旋转性条件的 α 值是 $\alpha = (4)^{1/4} = 1.414$ 。中心复合设计的另一个有用的性质是, 它可以由一阶设计 (2^k 设计) 附加一些轴向点以及也许是几个中心点“组装”出来, 这也是响应曲面设计序贯性的体现。

中心复合设计的另一个性质是可以用中心点的个数 n_c 来控制。恰当的选择 n_c 可以使中心复合设计是正交的, 或者是一致精度的设计。在一致精度的设计中, \hat{y} 在 origin 处的方差等于 \hat{y} 在与 origin 为一个单位距离处的方差。一致精



度设计比正交设计更能防止回归系数的偏差,因为在真实的曲面中会出现三阶或更高阶的项。中心复合设计的一种变异是面中心的中心复合设计,其中 $\alpha=1$ 。此设计在各坐标轴上所取的点是立方体各个面上的中心点,对于 $k=3$ (图9-45)。

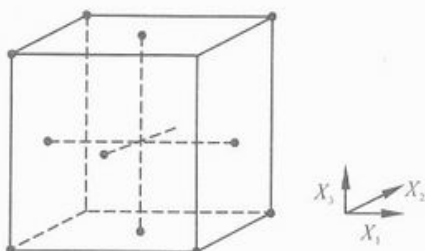


图9-45 $k=3$ 的面中心复合设计

中心复合设计的这种变异有时被采用,因为它只要求每个因子有三个水平,而实践中,经常难以改变因子水平。但是,面中心的复合设计是不可旋转的,这是它的一个严重的缺点。

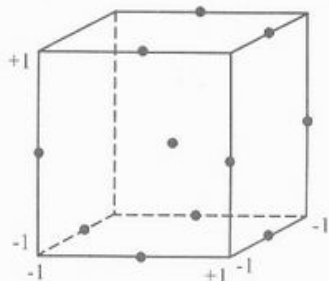


图9-46 三变量的 Box-Behnken 设计

(2) **Box-Behnken 设计** Box 和 Behnken 在1960年提出过一些拟合二阶响应曲面的三水平设计,这些设计是由 2^k 设计与不完全区组设计组合而成。Box-Behnken 设计对要求做的实验次数来说,十分有效,而且它们是可旋转的(或近似可旋转的)。这种设计的另一个优点就是它是个球形

设计。注意到 Box-Behnken 设计不包含由各个变量的上限和下限所生成的立方体区域的顶点处的任一点。当立方体角上的点所代表的因子水平组合,或实验成本过于昂贵或因实际限制而不可能做实验时,此设计就显出它特有的长处。三变量的 Box-Behnken 设计见图9-46。

在实验设计方面,不提到 Box 的一阶设计以及 Box 和 Draper 富有创造性的可旋转性是不完整的。然而已经发生的变化反映了这样一个事实——实践者们更加乐观和雄心勃勃地向更复杂和艰难的问题动手了。举例来说,我们已经有多响应、更复杂的模型和一些根本就不适用于用多项式逼近的情况。我们有难以想像的变量个数以及很明显的非正态响应,这甚至向经典设计的适用性提出了质疑。但是在通常情况下,传统的实验设计仍然是有效的、近优的和最为广泛使用的。

第四节 田口方法

一、田口方法简介

相比于西方的同行,日本的工程师对实验设计的接触更早一些。在费歇尔的比较实验的基础上,日本著名的管理实践专家田口玄一博士提出了与生



产、工程实践结合更加紧密,同时更方便工程人员使用的实验设计方法,通常称作“田口方法”。它是一种最新颖、科学、有效的稳健性优化设计方法,是稳健性设计的主要技术。田口方法的基本思想是将传统的产品设计、工艺设计程序改为按系统设计、参数设计、容差设计三次定量优化的程序。在三次设计中,以误差因子模拟造成产品质量波动的各种干扰,以信噪比作为衡量产品质量稳定性的指标,通过对实验数据的统计分析,找出性能最稳定、可靠,成本最低廉的设计方案,以达到最优的技术经济综合效果。

田口方法不仅可应用于生产制造阶段,更主要地应用于工艺设计、产品设计和技术开发阶段。田口方法的最大特点是将质量管理与经济效益联系在一起,运用数学方法,从工程观点、技术观点和经济观点对质量管理的理论方法进行综合研究,从而形成了一套独具特色的有效性、通用性、边缘性极强的质量设计、质量评价方法体系。田口玄一博士本人将其称之为“质量工程学”,而美国将其誉之为“田口方法”。鉴于篇幅所限,本节只讨论田口方法几个比较重要的概念,有关具体的设计将不加以讨论。

二、田口方法的重要概念

1. 损失函数

一般地,产品或零件的质量特征值的分布服从正态分布,其中落在上、下控制限之外的值判定为不合格。通常我们并不考虑其在经济上造成的损失。而田口玄一博士的独到之处恰是把这种波动与经济损失联系起来,提出了损失函数的概念。在稳健性工程中,我们用损失函数来确定产品的规格限。损失函数的形式因质量特性的不同而有所差异。

(1) 望目特性的损失函数 对于望目特性,当产品的质量特征值 y 的目标值为 m 时,若 $y \neq m$,则造成损失,且 $|y - m|$ 越大,损失越大。 y 偏离目标值 m 时的损失函数为

$$L(y) = L(m + y - m) \quad (9-24)$$

我们将损失函数按泰勒公式展开为

$$L(y) = L(m) + \left[\frac{L'(m)}{1!} \right] (y - m) + \left[\frac{L''(m)}{2!} \right] (y - m)^2 + \dots \quad (9-25)$$

根据假定, $L(m) = 0$, 另外,因为 $L(y)$ 在 $y = m$ 时损失最小,所以 $L'(m) = 0$ 。因此,损失函数 $L(y)$ 可表示为

$$L(y) = k(y - m)^2 \quad (9-26)$$

式中 k 为比例系数,由容差 Δ 和不合格品损失 A 或功能界限 Δ_0 和丧失功能的



损失 A_0 求得, $k = \frac{A}{\Delta^2}$ 或 $k = \frac{A_0}{\Delta_0^2}$ 。望目特性的损失函数曲线如图 9-47 所示。

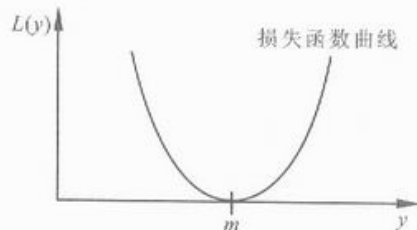


图 9-47 望目特性的损失函数

(2) 望大特性的损失函数 对于望大特性, 目标趋于无穷大, 其损失函数为

$$L(y) = k \left(\frac{1}{y^2} \right) \quad (9-27)$$

式中 $k = A_0 y_0^2$, A_0 为顾客损失, y_0 为顾客容差。

(3) 望小特性的损失函数 对于望小特性, 目标为零, 其损失函数为

$$L(y) = ky^2 \quad (9-28)$$

式中 $k = A_0 / y_0^2$; A_0 ——顾客损失; y_0 ——顾客容差。

2. 信噪比

作为传统响应输出的替代, 田口玄一博士提出了信噪比 (S/N) 的概念。他以信噪比作为评价功能性的指标, 用以度量质量特征值的稳健程度。通常, 由于产品的质量特征值 y 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 以望目特性为例, 人们一方面希望 y 的均值 $\mu = m$, 另一方面则希望方差 σ^2 越小越好。于是, 人们用变异系数 $V = \sigma/\mu$ 度量质量特征值的欠佳性, 因而, 也就可以用 $1/V$ 来度量质量特征值的优良性。田口玄一博士将其等效地以 $\eta = \mu^2/\sigma^2$ 来度量 y 的优良性, 并将其称为“信噪比”。设测得望目特性质量特征值 y 的 n 个数据 y_1, y_2, \dots, y_n , 根据数理统计知识, μ, σ^2, μ^2 的无偏估计分别为

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (9-29)$$

$$\hat{\sigma}^2 = V_e = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - S_m \right) \quad (9-30)$$

$$\hat{\mu}^2 = (\bar{y})^2 - \frac{V_e}{n} = \frac{1}{n} (S_m - V_e) \quad (9-31)$$

其中, $S_m = n (\bar{y})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$, 则 η 的估计公式为

$$\hat{\eta} = \frac{\frac{1}{n} (S_m - V_e)}{V_e} \quad (9-32)$$



在实际计算时, 将 $\hat{\eta}$ 取常用对数再乘以 10, 化为分贝 (dB) 值。在不致引起混淆的情况下, 将化为分贝值的信噪比 (S/N) 仍记为 η , 其计算公式为

$$\eta = 10 \lg \frac{\frac{1}{n} (S_m - V_e)}{V_e} \quad (\text{dB}) \quad (9-33)$$

以分贝值表示的 S/N 不仅计算方便, 而且可使经对数变换的 η 更接近于正态分布, 可采用方差分析进行统计分析; 同时, 因子的效应也大多具有可加性, 忽略交互作用的影响。由于篇幅所限, 对于望大和望小特性的质量特征值 y 的信噪比, 这里只给出最终的公式, 而省略其推导过程。望大特性质量特征值 y 的信噪比

$$\eta = -10 \lg \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (9-34)$$

望小特性质量特征值 y 的信噪比

$$\eta = -10 \lg \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \quad (9-35)$$

上面介绍的信噪比均属静态信噪比, 有关动态信噪比读者可参考有关文献资料。

3. 内外表

田口玄一博士将所有的影响因子分为可控因子和噪声因子, 可控因子是指人们可以控制其水平变化的因子; 噪声因子是指不能控制的因子, 如环境的温度、产品的老化以及操作者的水平等。他提出用内外表安排实验, 即在内表中安排可控因子, 再将按不同水平组合的噪声因子列于外表中。一般, 以 1, 2 (或 1, 2, 3) 代表因子的低、高 (或低、中、高) 水平。田口玄一博士的内外表也是一种正交表 (表 9-35)。表 9-35 中, 内表是由三水平的四个可控因子 (A, B, C, D) 进行 9 次试验构成, 外表则是由二水平的三个噪声因子 (E, F, G) 进行 4 次试验而得到, 因此, 该实验设计总共要进行 36 次试验。需要注意的是, 在田口方法实验中, 噪声因子虽然在生产和使用中是不可控的, 但是在实验中必须是可控的。田口实验设计的分析工具仍是方差分析, 这方面的内容前面已经介绍, 在此不再重复。



表 9-35 内外表

试验	内表 L_9				外表 L_4					\bar{Y}	S/N
	A	B	C	D	E	1	2	2	1		
					F	1	2	1	2		
					G	1	1	2	2		
1	1	1	1	1		Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	\bar{Y}_1	S/N_1
2	1	2	2	2		Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	\bar{Y}_2	S/N_2
3	1	3	3	3		Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}	\bar{Y}_3	S/N_3
4	2	1	2	3		Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}	\bar{Y}_4	S/N_4
5	2	2	3	1		Y_{51}	Y_{52}	Y_{53}	Y_{54}	\bar{Y}_5	S/N_5
6	2	3	1	2		Y_{61}	Y_{62}	Y_{63}	Y_{64}	\bar{Y}_6	S/N_6
7	3	1	3	2		Y_{71}	Y_{72}	Y_{73}	Y_{74}	\bar{Y}_7	S/N_7
8	3	2	1	3		Y_{81}	Y_{82}	Y_{83}	Y_{84}	\bar{Y}_8	S/N_8
9	3	3	2	1		Y_{91}	Y_{92}	Y_{93}	Y_{94}	\bar{Y}_9	S/N_9

思考与练习 9

- 全因子实验与部分因子实验的区别与联系?
- 如何理解实验设计的序贯性?
- 实验设计中, 中心点的作用是什么? 中心点的增加是否会破坏实验的平衡性和正交性?
- 对于一个 2^5 全因子实验, 有多少个主效应、二阶交互作用、三阶交互作用、四阶交互作用和五阶交互作用?
- 计算如表 9-36 设计的各因子主效应和交互作用:

表 9-36

温度	浓度	催化剂	产量
-	-	-	60
+	-	-	77
-	+	-	59
+	+	-	68
-	-	+	57
+	-	+	83
-	+	+	45
+	+	+	85

